

國立彰化高級中學 109 學年度科學班甄選【數學科】試題

注意事項：

1. 可能會用到的公式

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

一等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，首項 a_1 、公差為 d ，則第 n 項 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ；前 n 和為 $\frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

根的性質：若 $f(a) = 0$ ，則稱 a 為 $f(x) = 0$ 的根

$\triangle ABC$ 中，三邊長 $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ ，則面積為 $\frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ， $s = \frac{a+b+c}{2}$ ， $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2)$

2. 本試卷共有兩頁，請將答案寫在答案卷上，並將試題卷、答案卷、計算紙交回。

3. 第 1~12 題，每題 6 分，第 13~16 題，每題 7 分。

4. 答案需化至最簡型式，不得以 n^m 、 $n!$ 、 P_m^n 、 C_m^n 呈現。

5. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。

【題目開始】

1. 試求 123456×987654 之值_____。

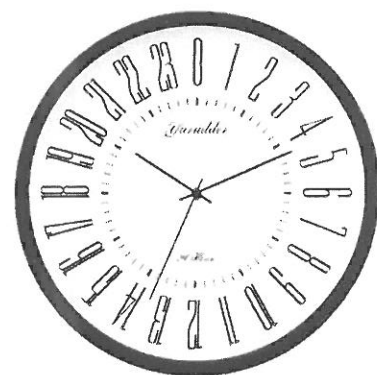
2. 假設 a 是最小的三位數質數、 b 是最大的三位數質數、 c 是最小的四位數質數，試找出 $a+b+c$ 的所有質因數_____。

3. 在整係數中因式分解： $x^8 + 17x^4 + 16x^2 + 17$ _____。

4. 試求 $\sqrt{91 \times 97 \times 103 \times 109 + 1296}$ 之值_____。

5. 化簡 $\frac{2\sqrt{21} - \sqrt{35} + 5\sqrt{15} - 16}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ 成最簡根式_____。（註明：有理化分母）

6. 一 24 小時的時鐘(如右圖)，試求 3 點 53 分時，時針與分針夾角的度數_____。

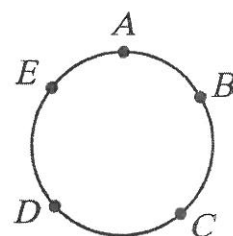


(註明：取小於 180 度的夾角，如果夾角有小數點需取整數部分，並算至度的最小單位"。 $1^\circ = 60'$ 、 $1' = 60''$)

7. 有一最簡分數，分子與分母之和為 80，將此數化成小數並四捨五入後為 0.4，試求此分數_____。

(註明：分子分母都是正整數)

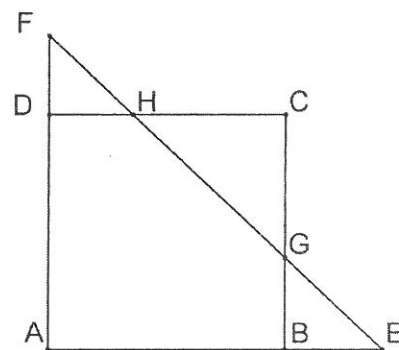
8. 彰化市的外環道路旁沿著路線設有 A、B、C、D、E 共 5 個休息站，如右圖，每個休息站依次設有飲水機 17, 11, 14, 8, 10 台以供市民使用。現在為了使各休息站的飲水機台數相等，請問最少要移動_____台，才能達到每站有相同個數的飲水機；並說明移動方法_____。



(註明：為了節省成本，每一站只能將飲水機搬動到相鄰的休息站，例如 A 的飲水機只能搬動到 B 或搬動到 E)

9. 已知一數列： $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{9}{9}, \frac{16}{9}, \frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{9}{11}, \frac{16}{11}, \frac{25}{11}, \dots$ ，依此規律，試求此數列的前 50 項和為_____。

10. 如右圖， $ABCD$ 為一邊長 10 的正方形，在 \overline{AB} 延長線和 \overline{AD} 延長線上各取一點 E 與 F ，使得正方形 $ABCD$ 的面積與 $\triangle AEF$ 面積相等，若 \overline{EF} 與 \overline{BC} 交於 G ， \overline{EF} 與 \overline{CD} 交於 H ，且 $\overline{BG} = 4$ ，求 \overline{DF} 的長度_____。

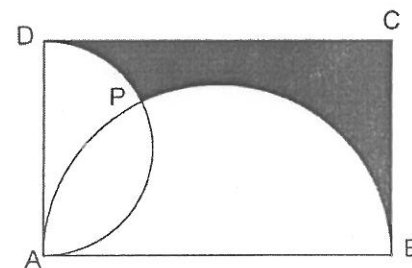


11. 假設 $f(x) = \frac{25^x}{25^x + 5}$ ，計算 $f(\frac{1}{2000}) + f(\frac{2}{2000}) + \dots + f(\frac{1999}{2000})$ _____。

12. 如果圖形 $y = (x+1) \cdot |x-2| - 2$ 與直線 $y = x+k$ 恰好有三個不同的交點，試求實數 k 的範圍_____。

13. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 14$ 、 $\overline{AC} = 12$ 、 M 為 \overline{AC} 中點，若 \overline{BM} 平行 $\angle A$ 的外角角平分線，試求 $\triangle ABC$ 的面積_____。

14. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{AD} 為直徑作半圓交於 P ，試求陰影區域 $BCDP$ 的面積_____平方單位。（註明：圓周率以 π 表示）



15. 化簡 $\sqrt[3]{40+11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40-11\sqrt{13}} =$ _____。

16. 交通部環境永續指標研究計畫中的「公共運輸乘客人次」，調查資料發現：隨著多項重大交通建設完工，如 2008 年高鐵通車、2017 年桃園機場捷運通車、以及台北捷運陸續開通內湖線、新莊線、信義線、松山線等，公共運輸每年的搭乘人次穩定成長。2018 年已達約 24 億人次，成長的運輸量主要來自台北捷運。公共運輸市占率雖從 2009 年的 16.3% 上升至 2016 年的 18.1%，但僅有北北基 3 個縣市超過 30%，其餘 19 個縣市皆在 15% 以下。根據統計資料：2016 年高鐵搭乘人次為北捷、台鐵搭乘人次總和的 65 倍；而 2017 年搭乘人次較 2016 年北捷增長 4%、台鐵負增長 2%、高鐵增長 5%；北捷增長人次為高鐵增長人次的 1%；總增長人次有 435 萬人。

試求 2016 年台北捷運、台鐵、高鐵搭乘人次各為_____萬人。（四捨五入計算到整數位）

【試題結束】

國立彰化高級中學 109 學年度科學班甄選【數學科】簡答

得分

1. 本試卷共有兩頁，請將答案寫在答案卷上，並將試題卷、答案卷、計算紙交回。
2. 第 1~12 題，每題 6 分，第 13~16 題，每題 7 分。
3. 答案需化至最簡型式，不得以 n^m 、 $n!$ 、 P_m^n 、 C_m^n 呈現。
4. 所有圖形僅作參考，不代表實際大小。

1	2	3	4
121931812224	7,43	$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 17)$	9955
5	6	7	8
$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$100^{\circ}15'$	$\frac{23}{57}, \frac{21}{59}$	9。 $A \rightarrow B: 1$ 、 $C \rightarrow D: 2$ $E \rightarrow D: 2$ 、 $A \rightarrow E: 4$
9	10	11	12
$57\frac{13}{21}$	$2\sqrt{5}$	$\frac{1999}{2}$	$-4 < k < 0$
13	14	15	16
$16\sqrt{5}$	$9\sqrt{3} - \frac{7}{2}\pi$	5	台北捷運搭乘人次 108 萬、台鐵搭乘人次 25 萬、高鐵搭乘人次 8624(8640)萬。

在北捷台鐵正確情況下高鐵只要 8600 萬左右即可