計算2

條件:$x, y, z \in R^{+}$,證明$\frac{2x^2+xy}{z(2\sqrt{y}+\sqrt{x})^2}+\frac{2y^2+yz}{x(2\sqrt{z}+\sqrt{y})^2}+\frac{2z^2+zx}{y(2\sqrt{x}+\sqrt{z})^2}\ge 1$

$pf$ :因為$(x+x+y)(1+\frac{y}{x}+1)\ge(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2\Rightarrow\frac{2x+y}{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2}\ge\frac{x}{2x+y}$

$\Rightarrow\frac{x(2x+y)}{z(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2}\ge\frac{x^2}{z(2x+y)}$......(1)

同理$\frac{y(2y+z)}{x(2\sqrt{z}+\sqrt{y})^2}\ge\frac{y^2}{x(2y+z)}$......(2)

同理$\frac{z(2z+x)}{y(2\sqrt{x}+\sqrt{z})^2}\ge\frac{z^2}{y(2y+x)}$......(3)

將(1),(2),(3)加起來$\Rightarrow$

$$\frac{2x^2+xy}{z(2\sqrt{y}+\sqrt{x})^2}+\frac{2y^2+yz}{x(2\sqrt{z}+\sqrt{y})^2}+\frac{2z^2+zx}{y(2\sqrt{x}+\sqrt{z})^2}\ge\frac{x^2}{z(2x+y)}+\frac{y^2}{x(2y+z)}+\frac{z^2}{y(2y+x)}$$

$$\ge\sqrt[3]{\frac{3x^2}{z(2x+y)}\times\frac{3y^2}{x(2y+z)}\times\frac{3z^2}{y(2y+x)}}$$

$$\ge\sqrt[3]{\frac{3}{(2+\frac{y}{x})}\times\frac{3}{(2+\frac{z}{y})}\times\frac{3}{(2+\frac{z}{x})}}$$

$\ge 1$(最後一步根據$Note$)

$Note:(2+\frac{y}{x})(2+\frac{z}{y})(2+\frac{z}{x})\le 27$

證明:考慮$\frac{\text{A+B+C}}{3}\ge\sqrt[3]{ABC}, A, B, C$皆正數

$$\sqrt[3]{(2+\frac{y}{x})(2+\frac{z}{y})(2+\frac{z}{x})}\le\frac{(2+\frac{y}{x})+(2+\frac{z}{y})+(2+\frac{z}{x})}{3}$$

兩邊三次方$\Rightarrow(2+\frac{y}{x})(2+\frac{z}{y})(2+\frac{z}{x})\le\frac{(6+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z})^3}{27}$

其中$\frac{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}{3}\ge\sqrt[3]{1}\Rightarrow\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\ge 3$,也就是$\frac{(6+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z})^3}{27}$恆大於27,故得證