2021 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試（一）試題

考試時間：2020 年 11 月 21 日上午 10:00 ∼ 12:00

說明：本試題共兩頁，分成兩部分：選填題與非選擇題。

作答方式：

- 選填題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用藍、黑色原子筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

第一部分：選填題

說明：本部分共有五題，每一題或小題的配分標於題前，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項：答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。

1. (7 分) 已知 α,β,γ 為方程式 $x^3+ax+1=0$ 之三根，其中 a 為正實數。方程式 $x^3+bx^2+cx-1=0$ 之三根為 $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\gamma},\frac{\gamma}{\alpha}$。已知 $\dfrac{|b|+|c|}{a}$ 的最小值可以寫成 $m^{1/n}$，其中 m,n 為正整數且 $n\leqslant 9$，則數對 $(m,n)=$ $\underline{(①②③④,⑤)}$。

2. (a) (3 分) 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I。將 I 分別與頂點 A,B,C 以線段連接，與三角形的三邊圍出三個面積分別為 $2,3,4$ 的小三角形。則 $\triangle ABC$ 的內切圓面積為 $\underline{\dfrac{\sqrt{⑥⑦}}{⑧}\pi}$。(化為最簡根式)

   (b) (4 分) 設 $ABCD$ 為平行四邊形，點 E,F 分別落在 AB,BC 邊上。已知 $\triangle AED$ 的面積等於 7、$\triangle EBF$ 的面積等於 3、$\triangle CDF$ 的面積等於 6。則 $\triangle DEF$ 的面積等於 $\underline{⑨\sqrt{⑩⑪}}$。(化為最簡根式)

3. (7 分) 某款桌遊共有 10 張牌，其中 3 張畫有一個骷髏頭，另外 5 張畫有一枚硬幣，剩下的 2 張為空白。將這 10 張牌面朝下洗牌後堆成一疊，由最上方起逐張依序開牌，直到累積出現 3 張骷髏頭或 3 枚硬幣便停止。則因累積出現 3 張骷髏頭而停止的機率為 $\underline{\dfrac{⑫}{⑬⑭}}$。（化為最簡分數）

4. (7 分) 設 n 為正整數，且所有與 n 互質的正整數 m 都滿足 m^6 除以 n 的餘數等於 1。則 n 之最大可能值為 ⑮⑯⑰⑱ 。

5. (7 分) 三角形 ABC 中，$\angle A = 23^\circ$，$\angle B = 46^\circ$。設 Γ 為以 C 為圓心、CA 長為半徑的圓。作 $\angle B$ 的外角平分線 L，且 Γ 與 L 交於 M, N 兩點。則 $\angle MAN =$ ⑲⑳ °。

第二部分：非選擇題

說明：每題 7 分，每題配分亦標於題前。答案必須寫在「答案卷」上，並標明題號，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用藍、黑色原子筆書寫，除幾何作圖外不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。

一、 (7 分) 找出所有符合下列性質的正整數 A, B：

* A, B 寫成十進位後，有相同的位數。
* $2 \cdot A \cdot B = \overline{AB}$，其中 $\cdot$ 是一般的乘法，而 $\overline{AB}$ 是將 A, B 的十進位表示法依序連接寫成的十進位數字，例如 $A = 12, B = 34$ 時，$\overline{AB} = 1234$。

二、 (7 分) 給定正整數 n。有一張 $n \times n$ 的方格紙。對於方格紙上的一對方格，這兩個方格有公共點（可以是共邊也可以是共頂點），則我們稱這一對方格 “相鄰”。試求此方格紙上相鄰方格的對數。

参考答案：

1. $(3888, 6)$
2. (a) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}\pi$; (b) $2\sqrt{22}$
3. $\dfrac{5}{28}$
4. 0504
5. 60°

一、 $(A,B) = (3,6), (13,52)$

二、 $2(n-1)(2n-1)$ (或 $4n^2-6n+2$)

2021 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試（一）

非選擇題參考解答

一、 (7 分) 找出所有符合下列性質的正整數 A, B：

* A, B 寫成十進位後，有相同的位數。
* $2 \cdot A \cdot B = \overline{AB}$，其中 $\cdot$ 是一般的乘法，而 $\overline{AB}$ 是將 A, B 的十進位表示法依序連接寫成的十進位數字，例如 $A = 12, B = 34$ 時，$\overline{AB} = 1234$。

解. $(A,B) = (3,6)$，$(13,52)$ 共兩組解。

設 A,B 為 n 位數。由 $2AB = 10^n A + B$ 可得 $(2B - 10^n)A = B$，從 $10A > B > \dfrac{A}{10}$，可得 $9 \geqslant 2B - 10^n \geqslant 1$，所以有

$$B = \frac{10^n + k}{2}, \qquad A = \frac{B}{k} = \frac{10^n + k}{2k} \tag{1}$$

對某個 $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 成立。

考慮 A,B 皆為整數及質數 2,3，知 $k \in \{2,4,8\}$，且 $n = v_2(k)$。代回即得 **(??)** 即得 (A,B) 的解只有 $(3,6)$, $(13,52)$, $(63,504)$ 等，但最後一組不合（位數不同），排除之。 □

二、 (7 分) 給定正整數 n。有一張 $n\times n$ 的方格紙。對於方格紙上的一對方格，這兩個方格有公共點（可以是共邊也可以是共頂點），則我們稱這一對方格 “相鄰”。試求此方格紙上相鄰方格的對數。

解. $2(n-1)(2n-1)$，或 $4n^2-6n+2$ 組。

以下證明，對於 $n\times n$ 的方格紙，共有 $2(n-1)(2n-1)$ 個方格對。

解法一： (計數原理) 注意到每個共邊的相鄰方格對會唯一對應方格紙的一條內邊，而方格紙的每個內點洽對應共在該點的兩個相鄰方格對。因此相鄰方格對的總數為

$$\text{內邊數}+2\times\text{內點數}=2n(n-1)+2(n-1)^2=2(n-1)(2n-1)$$

解法二： (數學歸納法) 易知 $n=2$ 時共有 6 對。假設命題對 n 時成立，則在 $n+1$ 時，左上方的 $n\times n$ 方格共有 $2(n-1)(2n-1)$ 個相鄰對，而第 $n+1$ 列與第 $n+1$ 行的格子會再帶來 $8n-2$ 個相鄰對，故總共會有 $4n^2+2=4[(n+1)-1][2(n+1)-1]$ 個相鄰對。

□