2017年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題與解答

2016 年 12 月 4 日 上午 10:00 ~ 12:00

說明: 本試題共兩頁七題, 每題七分。

將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。

答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。

答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入0.

一、(7分) 已知 E 是矩形 $ABCD$ 邊 AD 的中點, $BE \perp AC$ 於點 F, $AF = 2$. 則 $DF = \underline{①\sqrt{②}}$

Ans. $2\sqrt{3}$

二、(7分) 已知 a, b, c, d 是不全爲 0 的實數且 k_1, k_2, k_3, k_4 爲正整數。滿足

$$b + c + d = k_1 a,\ c + d + a = k_2 b$$
$$d + a + b = k_3 c,\ a + b + c = k_4 d.$$

令 $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ 之可能值爲 $p_i,\ i = 1, \cdots, 12$.

試問: $\sum_{i=1}^{12} p_i = \underline{③④⑤}$.

Ans. $12 + 13 + 14 + 16 + 18 + 20 + 25 + 26 + 27 + 28 + 33 + 50 = 282$.

三、(7分) 設 a_n 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ $(n \geq 3)$ 中具有如下性質的子集的個數:

每個子集至少含有 2 個元素, 且每個子集中任意 2 個元素之差 (絕對值) 大於 1.

試問: $a_{10} = \underline{⑥⑦⑧}$.

Ans. 133

四、(7分) 已知 $f(x)$ 是定義在實數上的函數。若 $f(0) = 0$, 且對任意實數 x, 滿足

$$f(x + 4) - f(x) \leq x^2,$$
$$f(x + 16) - f(x) \geq 4x^2 + 48x + 224,$$

試問: $f(64) = \underline{⑨⑩⑪⑫⑬}$.

Ans. 19840

五、 設 n $(n \geq 11)$ 是正整數。由不大於 n 的連續 10 個正整數的和組成集合 A, 由不大於 n 的連續 11 個正整數的和組成集合 B. 若 $A \cap B$ 的元素個數是 181.

試問:

(i) (3分) n 的最小值爲 $\underline{⑭⑮⑯⑰}$,

(ii) (4分) n 的最大值爲 $\underline{⑱⑲⑳㉑}$.

Ans. n 的最小值爲 2001, n 的最大值爲 2011.

六、(7分) 設三個不同的質數 a, b, c 滿足:

$$a|(3b-c),\ b|(a-c),\ c|(2a-7b),\ 20<c<80.$$

試問: $a^b c = \underline{㉒㉓㉔㉕}$

Ans. 2009

七、(7分) 在平行四邊形 $ABCD$ 中, $AB=8$, ΔABD 的外接圓半徑為 5.

試問: 對角線 AC 的最大值。答: $\underline{㉖\sqrt{㉗㉘}+㉙}$

Ans. $3\sqrt{17}+5$