

高雄市高雄中學 109 上高二第一次段考

一、多選題（每題 5 分，共 10 分：每題至少有 1 個是正確選項；只錯一個選項可獲得 3 分，錯兩個選項可獲得 1 分，答錯多於兩個選項或未作答者，該題以零分計算）

1. 試問下列選項中的方程式，哪些恰有兩個相異實根？

- (1) $\sin x + \cos x = 1$ ，其中 $0 \leq x \leq \pi$
- (2) $\pi \sin x = x$ ，其中 $-\pi \leq x \leq \pi$
- (3) $5 = \tan x$ ，其中 $0 \leq x \leq 2\pi$
- (4) $x^2 = \sin x$ ，其中 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$
- (5) $2 \cos 2x = |\cos x| + |\sin x|$ ，其中 $-\pi \leq x \leq \pi$

2. 考慮函數 $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x + 2$ ，請問下列選項何者正確？

- (1) $f(x)$ 是奇函數
- (2) $f(x)$ 的週期是 2π
- (3) 若 x 為任意實數， $f(x)$ 有最小值 0
- (4) 在 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ， $f(x)$ 是遞增函數
- (5) $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的對稱軸

二、填充題（共 75 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分	7	13	19	25	30	35	40	44	48	52	56	59	62	65

1. 比較 $\cos 1, \cos 2, \cos 3$ 之大小【 】

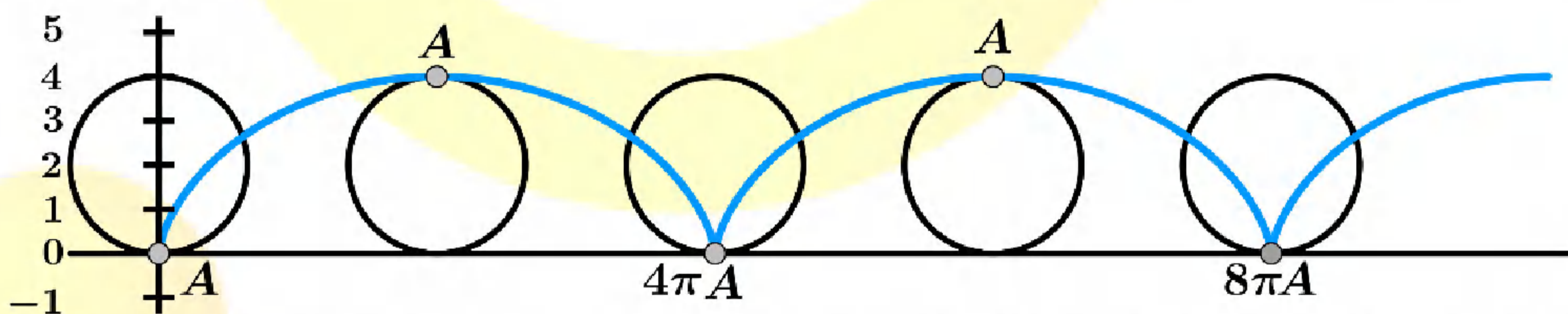


2. 已知函數 $f(x)$ 的函數是由函數 $g(x) = \cos x$ 經過以下步驟變換得到
- I. 將 $g(x)$ 圖形上所有點的縱座標伸長為原來的 5 倍，(橫坐標不變)，得到 $k(x)$
 - II. 將 $k(x)$ 圖形上所有點的橫座標伸長為原來的 3 倍，(縱坐標不變)，得到 $q(x)$
 - III. 將 $q(x)$ 圖形上所有點向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位長，得到 $f(x)$
- 試求 $f(x) = [\quad]$ ， $f(x)$ 的週期 $[\quad]$

3. 設 $0 \leq x \leq \pi$ ，則滿足不等式 $-1 \leq \sqrt{3} \sin x + \cos x \leq \sqrt{3}$ 之 x 的範圍為何？
【 \quad 】

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{BC} = 6$ 且 $\angle A = 2\angle C$ ，則 $\overline{AC} = [\quad]$

5. 在數學中，擺線(Cycloid)被定義為，一個圓在一條直線上滾動時，圓邊界上一定點所形成的軌跡。擺線也是最速降線問題和等時降落問題的解，示意圖如下。



- 線有一個半徑為 2 公分的圓型硬幣，與地面垂直接觸於 A 點，現沿著地面向右滾動了 20 公分，此時 A 點離地面高 $a \cos(x) + k$ 公分，
試求數對 $(a, x, k) = [\quad]$



6. 若 $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin 3x + \cos 3x =$ 【 】

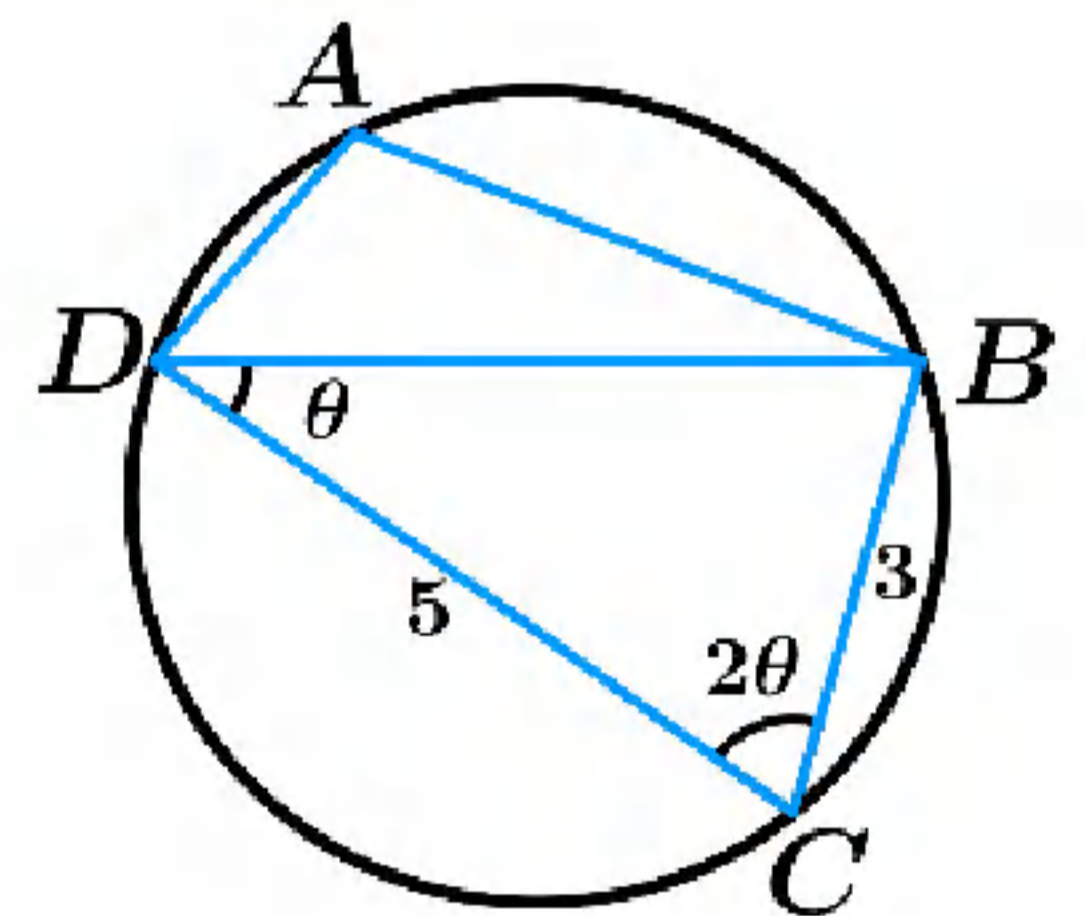
7. 已知 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi$ ，若 $f(x) = \sin 2x - 4(\sin x + \cos x)$

(1) 令 $t = \sin x + \cos x$ ，求 t 的範圍 【 】

(2) 求當 $x = m$ 時， $f(x)$ 有最小值 n ，試求 $(m, n) =$ 【 】

8. x 為實數，函數 $y = \frac{3 - \sin x}{1 + \cos x}$ 有最大值 M ，最小值 m ，
試求數對 $(M, m) =$ 【 】

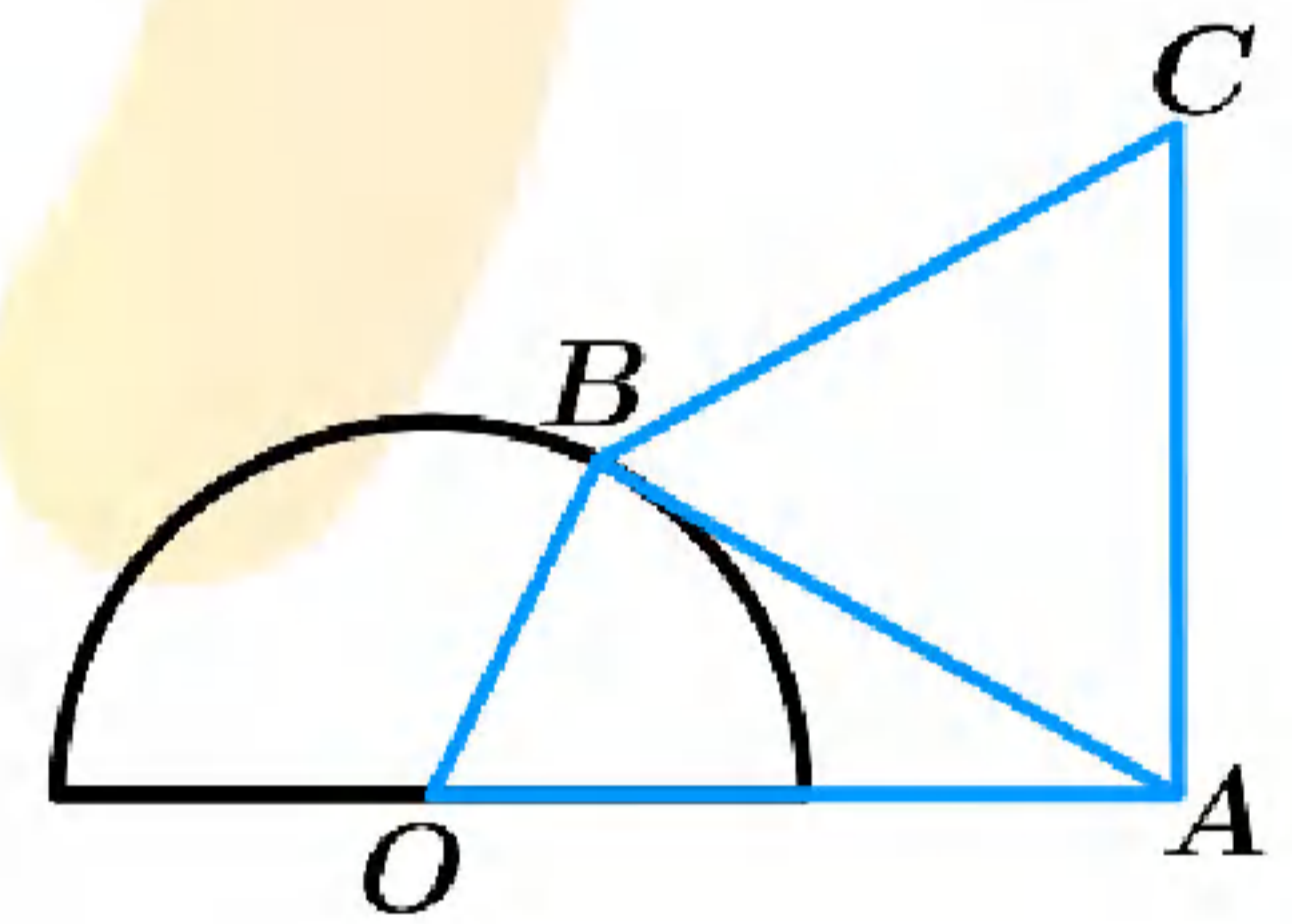
9. 如右圖(此為參考圖)，圖中 $ABCD$ 為圓內接四邊形， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\angle BCD = 2\angle BDC$ ，
試求 $\sin \angle BAD =$ 【 】



10. 試求 $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \cdots (1 + \tan 42^\circ)(1 + \tan 43^\circ)(1 + \tan 44^\circ) =$
【 】

11. 設 $\overline{AB} = 4$ ，在包含 \overline{AB} 之平面上滿足 $\angle APB \geq \frac{\pi}{3}$ 之點所形成區域面積為
【 】

12. 如右圖(此為參考圖)，半圓 O 的半徑為 1， A 為直徑延長線上一點， $\overline{OA} = 2$ ， B 為半圓上任一點，以 \overline{AB} 為一邊做正三角形 ABC ，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值
【 】



13. 小雄最近去博物館參觀畫展，其中有一幅巨大壁畫高 9 公尺，其下端距離地面 4.7 公尺，小雄眼睛距地面 1.7 公尺，則他應該站在離牆 x 公尺觀賞畫作，才可得最大視角 θ 。試求此時的 $x, \tan \theta$ ，並用數對 $(x, \tan \theta)$ 表示【 】



三、計算題 (共 15 分)

- (1) 試利用倍角公式及三倍角公式推導五倍角公式，
並以 $\sin(5\theta) = a\sin^5 \theta + b\sin^3 \theta + c\sin \theta$ 表示。(7 分)
(2) 利用五倍角公式求出 $\sin 18^\circ =$ 【 】 (3 分)

- 設 α, β, γ 為三角形 ABC 的三內角，若， $\tan \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ 且
 $\sin(\beta - \alpha) = \cos \gamma$ ，求三角形 ABC 三內角的度數。(5 分)

