

嘉義縣 100 學年度縣立高級中學高中部教師甄試【數學科】筆試試題卷

說明：1. 請於答案卷上作答，作答時免抄題但需書明題號，在本試題卷上作答者不予計分。

2. 繳交答案卷時本試題卷應一併繳回，不得攜出試場。

一、選擇題：第 1~4 題為單選題，第 5 題為複選題(全對才給分)，每題 5 分，共 25 分

1. 假設任意取得之統一發票，其號碼之個位數字為 0、1、...、9 中任一數字，且這些數出現之機率均相等。今自不同場所，各取得一統一發票，則三張發票號碼個位數字中，至少有一個為 0，且至少有一個為 9 的機率為
(A)0.048 (B)0.054 (C)0.096 (D)0.488 (E)0.067

2. 一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 具有 $a_1 = -1$ ，前 n 項和為 S_n ，若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 2 (D) -2 (E) $\frac{3}{2}$

3. 某班有 48 名學生，某次數學考試之成績，經計算得算術平均數為 70 分，標準差為 S 分。後來發現成績登錄有誤。某甲得 80 分卻誤記為 50 分，某乙得 70 分卻誤記為 100 分，更正後重算得標準差為 S_1 分。試問 S_1 與 S 之間，有下列

哪一種大小關係？(n 個數值 x_1, x_2, \dots, x_n 的標準差 S 公式為 $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}$ ，而 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$)

(A) $S_1 < S - 5$ (B) $S - 5 \leq S_1 < S$ (C) $S_1 = S$ (D) $S < S_1 \leq S + 5$ (E) $S + 5 < S_1$

4. $24a^5 3b^2$ 為 12 的倍數時，數對 (a, b) 有幾組解

(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 16

5. 下列數列何者為收斂？

(A) $\langle 1 + 0.9n \rangle$ (B) $\langle 2 \cdot \left(-\frac{9}{10}\right)^n \rangle$ (C) $\langle \frac{(-1)^n + 1^n}{2} \rangle$

(D) $\langle \frac{3^n}{2^{2n-1}} \rangle$ (E) $\langle \frac{1}{2n+1} \rangle$

二、填充題：第 6 題至第 18 題，每題 5 分，共 65 分

6. 有 A, B, C 三戶， $\overline{BC} = 100$ ， $\angle ABC = 100^\circ$ ， $\angle ACB = 50^\circ$ ，若 A, B, C 三戶主人仰望天空中一氣球，其仰角均為 15° ，則此氣球的高度為_____

7. 設 $f(x)$ 為三次以上的多項式，除以 $x^2 + x + 1$ 餘 $7x + 16$ ，除以 $x - 1$ 餘 8，求 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的餘式 = _____

8. 設 $n \in N$ ，若 $p = n^4 - 38n^2 + 169$ 為一質數，求此質數 $p =$ _____

9. 求 $\log_8 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right) =$ _____

10. 若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $\log_a(\sqrt{2} + 1) = 2x$ ，則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} =$ _____

11. 已知多項方程式 $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ 有一複數根 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ，若 a 為實數且滿足 $f(a) < 0$ ，求 a 之範圍為_____

(請翻至背面繼續作答)

12. 空間中四點 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(k, 0, 0)$ 、 $B(0, -k, 0)$ 、 $C(0, 0, 2k)$ ，其中 k 為實數且 $\triangle ABC$ 之面積為 150，求四面體 $OABC$ 之體積=_____

13. 考慮下列方程組：
$$\begin{cases} (1-a)x + y + z = 1 \\ x + (1-a)y + z = 1 \\ x + y + (1-a)z = 1 \end{cases}$$
。當 a 的值=_____時無解； a 的值=_____時有無限多組解

14. 某一工廠生產燈泡，12 個裝成一盒。工廠品質檢驗的方法是從每盒中任取 4 個來檢查，如有兩個或兩個以上的燈泡是壞的，則整盒淘汰。若現在某一盒有 5 個壞燈泡，則這一盒會被淘汰的機率為_____

15. $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cdots + \cos^2 180^\circ =$ _____

16. a, b, c 為 $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ 之三根，則行列式值
$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} =$$

17. 今有一三角形，其三邊長為連續整數且有一角為另一角之兩倍。求此三角形三邊長為_____

18. 令 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 為一複數集合且 $0 \notin S$ ，其中 n 為一自然數。若 S 滿足條件： $a_i \neq a_j \forall i \neq j$ 且 $a_i \cdot a_j \in S \forall i, j = 1, 2, \dots, n$ 。求集合 $S =$ _____

三、計算題：10 分

19. 將 $3^{33} + 1$ 分解為三個整數之積，使得每個因數都大於 3^{10} 。請寫下計算過程。