臺北市立西松高級中學 109 學年度教師甄試數學科試題

一、填充題（每題 7 分，請標明題號，並依序填寫答案）

1. 設拋物線$x^2=4y$上取兩點A,B，使$\overline{AB}=2$，在A,B處分別作拋物線的切線，則此兩切線交點的軌跡方程式為__________。
$y=\dfrac{x^4+4x^2-4}{4(x^2+4)}$

2. 設$A=\{(x,y)|(x-2)^2+2y^2\le 4\}$，$B=\{(x,y)|x\le 2y^2\}$，$C=A\cap B$，若將區域$C$繞$x$軸旋轉得一旋轉體，則此旋轉體體積為__________。
$\dfrac{9}{4}\pi$

3. 設橢圓：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$，點$P(x_0,y_0)$為橢圓上第一象限中的一點，過點$P$作切線交$x$軸於點$A$，交$y$軸於點$B$，當$\overline{AB}$有最小值時的切線方程式為$y=ax+b$，則數對$(a,b)=$__________。
$(-\frac{2\sqrt{5}}{5},6)$

4. 設x為實數，且$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中a,b,c,d為常數，若$f(1)=2020,f(2)=4040,f(3)=6060$，則$f(7)+f(-3)$之值為__________。
9280

5. 袋中有大小相同的球 36 個，其中紅、黃、綠三種顏色的球各 12 個，從中任意取出20個球，要求三種顏色的球都要有，則有__________種不同的取法。
108

6. 設x為實數，則函數$f(x)=\sqrt{x^4-x^2-4x+5}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$的最大值為__________。
$\sqrt{5}$

7. 已知實數α,β分別滿足$\alpha^3+3\alpha^2+6\alpha-8=0$及$\beta^3-6\beta^2+15\beta-2=0$，則$\alpha+\beta$之值為__________。
1

8. 求從等差數列 5,7,9,11,⋯,23 中任取二個數相乘後所得之數的總和為_________
8655

9. 空間中兩單位向量$\bar{a}$，$\bar{b}$，其夾角$\dfrac{\pi}{3}$。若存在一個向量$\bar{p}$與三個向量$\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{a}\times\bar{b}$的夾角皆為θ度，則$\cos 2\theta=$__________
$-\dfrac{1}{7}$

二、計算證明題（請標明題號，並依序作答）

1. 設數列$\langle a_n\rangle$，$a_1=1,a_{n+1}=2a_n+n-1(n=1,2,3,\cdots)$，求數列的一般項$a_n$(以$n$表示)。（12 分）
$a_n=2^n-n(n=1,2,3,\cdots)$

2. ΔABC 之內切圓與三邊切於 P，Q，R 三點。
(1)試證:面積比$\dfrac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\dfrac{r}{2R}$。(其中 ΔABC 之內切圓半徑 r，外接圓半徑 R。)
(2)試證:面積比$\dfrac{\Delta PQR}{\Delta ABC}\le\dfrac{1}{4}$，可得任意三角形之$2r\le R$。
（10 分）

3. 回答下列有關圓錐曲線的問題：
若定義圓錐曲線之離心率$e=\dfrac{\overline{PF}}{d(P,L)}$，其中 F 為其焦點，L 為其準線。
(1)已知動點 P 到點 $F(3,0)$的距離為到直線 $L:x=1$距離的一半，求此動點 P 的軌跡方程式?(此圓錐曲線為焦點 $F(3,0)$，準線 $L:x=1$，離心率$e=\dfrac{1}{2}$之橢圓。)
(2)承(1)，證明離心率$e=\dfrac{\overline{PF}}{d(P,L)}=\dfrac{c}{a}$，$a$ 為半長軸長，c 為中心到焦點的距離。
並求出橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$之兩條準線方程式?
（15 分）

(1)$3x^2+4y^2-22x+35=0$
(2) $x=-\dfrac{22}{3}$ 與 $x=\dfrac{28}{3}$