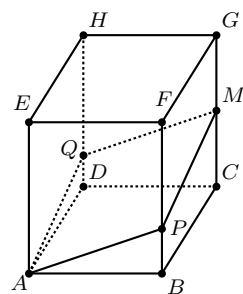


一、計算證明題 (每題 10 分, 請寫出過程, 否則不計分)

1. 請用高一學生可以理解的方法, 證明平面上點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離 $d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
2. 袋中有大小一致的紅球 5 顆, 白球 3 顆和黑球 2 顆, 若抽中紅球可得獎金 10 元, 抽中白球可得獎金 100 元, 抽中黑球可得獎金 200 元, 每次從袋中抽出一球, 抽出後不放回, 共抽兩次的獎金期望值是否恰為只抽一球所得獎金的 2 倍, 是偶然還是必然? 請用高一學生可以理解的方法說明.
3. 令無窮級數 $S = \frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} + \cdots$, 試求 S 之值.
4. 若三次多項式 $f(x) = 2x^3 - 6x - 3$, 則方程式 $f(f(x)) = 0$ 有幾個相異實根?
5. 若 $-3 \leq x \leq 1$, 試求 $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x}$ 的值域.

6. 一個邊長為 2 的正立方體 $ABCD - EFGH$, 點 M 為稜邊 \overline{CG} 的中點, 點 P 和 Q 分別在稜邊 \overline{BF} 及 \overline{DH} 上, 且 A, P, M, Q 為一平行四邊形的四個頂點, 如右圖所示. 今設定坐標系, 使得 D, A, C, H 的坐標分別為 $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0)$ 和 $(0, 0, 2)$, 試證四角錐 $G - APMQ$ 的體積為 $\frac{4}{3}$.



7. 設 z 為一複數, 若 $\frac{z-1}{z+1}$ 為純虛數, 試求 $|z^2 - z + 2|$ 的最小值.
8. 某校新建的教學大樓一樓共有 8 個班級, 每個班級的班牌都是相同的大小, 若學校想用紅, 綠, 藍, 黃四種顏色將班牌上色, 每個班牌只上一色, 上色的要求如下:
 - (1) 相鄰的兩個班級班牌不同色
 - (2) 第一個班級與第八個班級的班牌顏色不同
 - (3) 四種顏色均須用到
 根據以上考量, 請問有幾種不同的上色方法?
9. 正整數 n 是合數, 將 n 的正因數由小而大依序記為 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, 設 $f(n) = d_1 + d_2 + d_3, g(n) = d_{n-1} + d_n$, 若 $g(n) = (f(n))^3$, 試求所有可能的正整數 n .

10. 設 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = \overline{AC}$, 點 D 為 \overline{BC} 上一個動點, 過 D 做一條平行 \overline{AC} 之直線交 \overline{AB} 於 E 點; 過 D 做一條平行 \overline{AB} 之直線交 \overline{AC} 於 F 點, 而 D 對直線 EF 的對稱點為 D' , 試證 D' 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上.

