

臺中市立文華高級中等學校 109 學年度第 2 次教師甄選 數學科專業知能試題本

測驗說明：

- 一、本測驗分成二大題：填充題及計算證明題。
- 二、**填充題**：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。
- 三、**計算證明題**：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

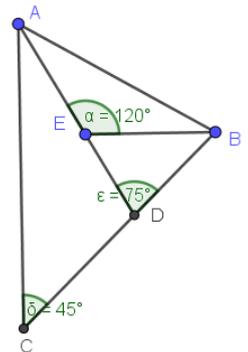
一、 填充題(每題 5 分，共 80 分，全對才給分。)

1. 設函數 $f(x)$ ，已知 $f(2x) < 0$ 共有 11 個整數解， $f(2x+5) < 0$ 共有 16 個整數解，則 $f(x) < 0$ 的整數解個數為_____個。

2. 若已知實數 α 、 β 滿足 $3^{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} - \alpha$ ， $\log_3 \beta = 2\sqrt{3} - 2\beta$ ，則 $(\alpha + \beta)^2 - 2(\sqrt{3})^\alpha - \log_3 \beta =$ _____。

3. 設樣本空間 $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ ，事件 $A = \{a, b\}$ ，則與事件 A 獨立的事件共有_____個。

4. 如右圖（此為示意圖）。在 $\triangle ABC$ 中， \overline{AD} 交 \overline{BC} 於 D 點， \overline{BE} 交 \overline{AD} 於 E 點，且 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\angle EDB = 75^\circ$ ， $\angle AEB = 120^\circ$ 。若 $\overline{CD} = 6$ ， $\overline{ED} = 4\sqrt{2}$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。



5. 空間中三向量 $\vec{a} = (3, 1, 5)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ，若

$$2\vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{c} \times \vec{b} + 7\vec{c} \times \vec{a} = (12, -4, 11)$$
，則行列式值

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{_____}。$$

6. 空間中三個相異平面 $\begin{cases} x + ay + a^2z = 2a^3 \\ x + by + b^2z = 2b^3 \\ x + cy + c^2z = 2c^3 \end{cases}$ 恰交於一點 $(-4, -2, 4)$ ，則 abc 之值為_____。

7. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，且 $M = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - 2\right)^2 + (a-1)^2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 + a^2}$ ，則 M 的最小值為_____。

8. 袋中有五顆球編號 1 號~5 號，現從袋中任取一球記下號碼後放回，連取三次，則三次中出現最大號碼數的期望值為_____。

9. 若 x 、 y 為整數， a 、 b 為有理數， i 為虛數單位，且
 $(2\sqrt{2} + \sqrt{2}i)x^2 - \sqrt{2}ixy - 2\sqrt{2}iy^2 + 3\sqrt{2}y + (3+4i)a - (2+i)b - (11\sqrt{2} + i) = 0$ ，則 $x + y + a + b =$ _____。
10. $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，若 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{n}] \leq 2020$ ，則 n 的最大值為_____。
11. 設函數 $f(x)$ 滿足：
 (1) 對於 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ ，有 $f(x_1) \leq f(x_2)$
 (2) $f(0) = 0$
 (3) $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$
 (4) $f(1-x) = 1 - f(x)$
 則 $f\left(\frac{109}{2020}\right) =$ _____。
12. $S_n = 0.7 + 0.077 + 0.00777 + \dots +$ 至第 n 項，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____。
13. 設 A_1 、 A_2 、 A_3 、 \dots 、 A_{109} 為正 109 邊形的 109 個頂點，且此正 109 邊形面積為 10，考慮由此正 109 邊形之連續數個邊及相異的首尾兩頂點連成之凸多邊形，如 $A_3A_4A_5A_6$ 或 $A_{108}A_{109}A_1A_2A_3A_4A_5$ 等，試求所有符合條件之凸多邊形的面積和為_____。
14. 將一個固定不動的圓分成 10 個相等的扇形，並用紅藍綠三種顏色加以著色，相鄰的扇形顏色不同，則有_____種著色方法。
15. 某面積為 $3\sqrt{3}$ 的三角形以 α 、 β 、 γ 為三邊長，若 α 、 β 、 γ 為方程式 $x^3 - 2kx^2 + (k^2 + 11)x - 96 = 0$ 之相異三根，則 k 值為_____。
16. 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 18 = 0$ 及一平面 $E: x + 2y - 2z - 16 = 0$ ， S 與 E 交於圓 C ，若過圓 C 上任一點做 S 的切平面恆過一定點 R ，則 R 的座標為_____。

臺中市立文華高級中等學校 109 學年度第 2 次教師甄選

數學科專業知能 (參考答案)

1	2	3
27	$3-2\sqrt{3}$	14
4	5	6
$6+2\sqrt{3}$	-29	-2
7	8	9
3	$\frac{21}{5}$	4
10	11	12
339	$\frac{1}{8}$	$\frac{700}{891}$
13	14	15
57770	1026	9
16		
(2,4,-6)		