大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 已知 $45° < \theta < 50°$，且設 $a = 1 - \cos^2\theta$、$b = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$、$c = \dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 1}$。
關於 a、b、c 三個數值的大小，試選出正確的選項。
(1) $a < b < c$　(2) $a < c < b$　(3) $b < a < c$　(4) $b < c < a$　(5) $c < a < b$。　【109 數甲】

答：(5)

解：$\because 45° < \theta < 50°$　$\therefore 1 < \tan\theta < \sqrt{3}$ 且 $\dfrac{1}{2} < \cos\theta < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$c = \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 1} < \frac{1}{2} < a = 1 - \cos^2\theta < b = \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}$$

2. 有 A、B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球，B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：
（一）先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；
（二）先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；
（三）同時分別在 A、B 箱中各抽取一球。
給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1、E_2、E_3，試選出正確的選項。
(1) $E_1 > E_2 > E_3$　(2) $E_1 = E_2 > E_3$　(3) $E_2 = E_3 > E_1$　(4) $E_1 = E_3 > E_2$
(5) $E_3 > E_2 > E_1$。　【109 數甲】

答：(3)

解：

A	紅	白白	白藍
P	$\dfrac{4}{10}$	$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{8}{10}$	$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{2}{10}$
\$	50	0	100

$$E_1 = 50 \times \frac{4}{10} + 0 \times \frac{48}{100} + 100 \times \frac{12}{100} = 32$$

A	藍	白白	白紅
P	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{8}{10}\times\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{8}{10}\times\dfrac{4}{10}$
\$	100	0	50

$$E_2 = 100 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{48}{100} + 50 \times \frac{32}{100} = 36$$

A	白白	白藍	紅白	紅藍
P	$\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}$	$\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}\times\frac{8}{10}$	$\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}$
$	0	100	50	100

$$E_3=0\times\frac{48}{100}+100\times\frac{12}{100}+50\times\frac{32}{100}+100\times\frac{8}{100}=36$$

3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每3.5小時會擴增為2.4倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌1000隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達4×10^{10}隻左右？（註：$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$）
(1)63小時　(2)70小時　(3)77小時　(4)84小時　(5)91小時。　【109數甲】

答：(2)

解：$4\times10^{10}=1000\times(2.4)^{\frac{T}{3.5}}\Rightarrow\left(\frac{24}{10}\right)^{\frac{T}{3.5}}=4\times10^{7}$

$\Rightarrow\frac{T}{3.5}\left(\log2^{3}+\log3-\log10\right)=\log2^{2}+\log10^{7}$

$\Rightarrow T\fallingdotseq\frac{2\times0.3010+7}{3\times0.3010+0.4771-1}\times3.5\fallingdotseq70$

二、多選題（佔40分）

4. 在坐標平面上，設O為原點，且A、B為異於O的相異兩點。令C_1，C_2，C_3為平面上三個點，且滿足$\overrightarrow{OC_n}=\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，$n=1$，2，3，試選出正確的選項。
(1)$\overrightarrow{OC_1}\neq\vec{0}$
(2)$\overline{OC_1}<\overline{OC_2}<\overline{OC_3}$
(3)$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$
(4)$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OB}<\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OB}$
(5)C_1，C_2，C_3在同一直線上。　【109數甲】

答：(4)(5)

解：(1)當$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$時，$\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$
(2)反例，$\overrightarrow{OA}=(3,0)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,0)$
(3)當$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$時，$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$
當$\angle AOB$為鈍角，$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OA}>\overrightarrow{OC_2}\cdot\overrightarrow{OA}>\overrightarrow{OC_3}\cdot\overrightarrow{OA}$
(4)正確
(5)正確

5. 對一實數a，以$[a]$表示不大於a的最大整數，例如：$[1.2]=[\sqrt{2}]=1$，$[-1.2]=-2$。考慮無理數$\theta=\sqrt{10001}$，試選出正確的選項。
(1)$a-1<[a]\leq a$對任意實數a均成立　(2)數列$b_n=\frac{[n\theta]}{n}$發散，n為正整數

(3)數列 $c_n=\dfrac{[-n\theta]}{n}$ 發散，n 為正整數　(4)數列 $d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數

(5)數列 $e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$ 發散，n 為正整數。【109 數甲】

答：(1)(5)

解：(1)正確

(2) $n\theta-1<[n\theta]\le n\theta \Rightarrow \theta-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[n\theta]}{n}\le\theta$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\theta-\dfrac{1}{n}\right)=\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta=\theta$，$b_n$ 收斂

(3) $-n\theta-1<[-n\theta]\le-n\theta \Rightarrow -\theta-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[-n\theta]}{n}\le-\theta$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\theta-\dfrac{1}{n}\right)=-\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-\theta)=-\theta$，$c_n$ 收斂

(4)當 $n>\theta=\sqrt{10001}$ 時，$\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0 \Rightarrow n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0$，收斂

(5)當 $n>\theta=\sqrt{10001}$ 時，$\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-1 \Rightarrow n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-n$，發散

6. 設 $F(x)$、$f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x)=f(x)$，試選出正確的選項。

(1)若 $a\ge0$，則 $F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)\,dt$

(2)若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$，則 $Q(0)=f(0)$

(3)若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x)-F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除

(4)若對所有實數 x，$F(x)\ge\dfrac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x，$f(x)\ge x$ 也都成立

(5)若對所有 $x>0$，$f(x)\ge x$ 都成立，則對所有 $x>0$，$F(x)\ge\dfrac{x^2}{2}$ 也都成立。

【109 數甲】

答：(1)(2)

解：(1)正確

(2)正確：$F(x)=xQ(x)+r \Rightarrow F'(x)=f(x)=xQ'(x)+Q(x)+0 \Rightarrow f(0)=Q(0)$

(3)反例：$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x+1 \\ F(x)-F(0)=\dfrac{1}{2}x^2+x \end{cases}$

(4)反例：$F(x)=x^4+x^2\ge\dfrac{x^2}{2}$ 恆成立，

但 $f(x)=4x^3+2x\ge x$，在 $x<0$ 時不成立

(5)反例：$F(x)=x^2-2\ge\dfrac{x^2}{2}$，在 $0<x<2$ 不成立，

但 $f(x)=2x\ge x$ 對所有 $x>0$ 都成立

7. 在複數平面上，設O為原點，且A、B分別表示坐標為複數z、$z+1$的點。
已知點A、點B都在以O為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。
(1)直線AB與實數軸平行　(2)ΔOAB為直角三角形　(3)點A在第二象限
(4)$z^3=1$　(5)坐標為$1+\dfrac{1}{z}$的點也在同一單位圓上。【109 數甲】

答：(1)(4)(5)

解：$z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(1)$\overleftrightarrow{AB}$與x軸（實數軸）平行
(2)ΔOAB為正Δ
(3)$A\in$第二或第三象限
(4)正確
(5)$\dfrac{1}{z}=\bar{z}=-\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$1+\dfrac{1}{z}=1\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

8. 設二階實係數方陣A代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足$A^3=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$；
另設二階實係數方陣B代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足
$B^3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。
(1)A恰有三種可能　(2)B恰有三種可能　(3)$AB=BA$
(4)二階方陣AB代表坐標平面的一個旋轉變換　(5)$BABA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$。【109 數甲】

答：(2)(5)

解：(1)$A^3=A^2A=IA=A=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$

(2)$B=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，$\theta=60°$或$180°$或$300°$

(3)$AB=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta&-\cos\theta\\-\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta&-\cos\theta\\-\cos\theta&-\sin\theta\end{bmatrix}$

(4)AB表鏡射矩陣
(5)$BABA=I$

三、選填題（佔分）

A. 在坐標空間中，設O為原點，且點P為三平面$x-3y-5z=0$、$x-3y+2z=0$、
$x+y=t$的交點，其中$t>0$。若$\overline{OP}=10$，則$t=$＿＿＿＿。(化為最簡根式)【109 數甲】

答：$4\sqrt{10}$

解：$\begin{cases} x-3y-5z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+y=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4}t \\ y=\dfrac{1}{4}t \\ z=0 \end{cases}$

$\overline{OP}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}t\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}t\right)^2+0^2}=10 \quad \Rightarrow t=4\sqrt{10}$

B. 考慮坐標平面上相異三點 A、B、C，其中 A 點為 $(1,1)$。分別以線段 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4,2)$。已知 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為________。【109 數甲】

答：$(7,-7)$

解：$\overrightarrow{AP}=(3,1)$，$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \overrightarrow{PB}=(x-4,y-2)=3(1,-3)$

$\therefore\ B(x,y)=(7,-7)$

C. 在一個三角形公園，其三頂點 O、A、B，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A、B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C，測得其俯角分別為 $30°$、$60°$、$45°$。則此三角形公園的面積為________平方公尺。(化為最簡根式)【109 數甲】

答：$7500\sqrt{2}$

解：$\left(150\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{150}{\sqrt{3}}\right)^2=2\left(150^2+\overline{AC}^2\right) \Rightarrow \overline{AC}=\overline{BC}=50\sqrt{6}$

$$\cos\angle OAB=\frac{\left(150\sqrt{3}\right)^2+\left(100\sqrt{6}\right)^2-\left(\dfrac{150}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\times150\sqrt{3}\times100\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ΔOAB 面積 $=\dfrac{1}{2}\times150\sqrt{3}\times100\sqrt{6}\times\dfrac{1}{3}=7500\sqrt{2}$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一. 在坐標平面上，由 A、B、C、D 四點所決定的「貝茲曲線」(Bézier curve)指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A,D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B，在點 D 的切線通過點 C。令 $y=f(x)$ 是由 $A(0,0)$、$B(1,4)$、$C(3,2)$、$D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

(1) 設 $y=f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y=ax+b$，其中 a,b 為實數。求 a,b 之值。(2 分)

(2) 試證明多項式 $f(x)$ 可以被 x^2-4x 所整除。(2 分)

(3) 試求 $f(x)$。(4 分)

(4) 求定積分 $\int_2^6\left|8f(x)\right|dx$ 之值。(4 分)【109 數甲】

答：(1) $(-2,8)$ (2)略 (3) $f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-12x^2+32x\right)$ (4) 56

解：(1) $\overleftrightarrow{CD}:(y-0)=-2(x-4) \Rightarrow y=-2x+8$

(2) $f(x)=x(x-4)(ax+b)$可被x^2-4x整除

(3) $\overleftrightarrow{AB}:(y-0)=4(x-0) \Rightarrow y=4x$

$f'(x)=(x-4)(ax+b)+x(ax+b)+x(x-4)\times a$

$f'(0)=-4b+0+0=4 \Rightarrow b=-1$

$f'(4)=0+4(4a+b)+0=-2 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$

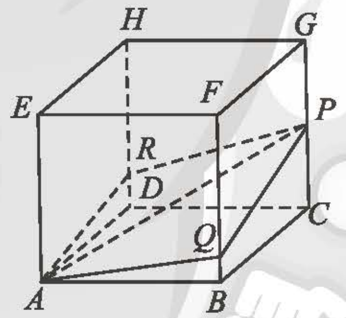
故 $f(x)=x(x-4)\left(\frac{1}{8}x-1\right)=\frac{1}{8}\left(x^3-12x^2+32x\right)$

(4) $\int_2^6|8f(x)|dx=\int_2^4\left(x^3-12x^2+32x\right)dx-\int_4^6\left(x^3-12x^2+32x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2+C\right]_2^4-\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2+C\right]_4^6$

$=[28]-[-28]=56$

二. 一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD-EFGH$，點 P 為稜邊 $\overline{CG}$ 的中點，點 Q、R 分別在稜邊 $\overline{BF}$、$\overline{DH}$ 上，且 A,Q,P,R 為一平行四邊形的四個頂點，如圖所示。今設定坐標系，使得 D、A、C、H 的坐標分別為 $(0,0,0)$、$(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$，且 $\overline{BQ}=t$，試回答下列問題。



(1)試求點 P 的坐標。(2 分)

(2)試求向量 $\overrightarrow{AR}$（以 t 的式子來表示）。(2 分)

(3)試證明四角錐 $G-AQPR$ 的體積是一個定值（與 t 無關），並求此定值。(4 分)

(4)當 $t=\frac{1}{4}$ 時，求點 G 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離。(4 分) 【109 數甲】

答：(1) $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ (2) $\left(-1,0,\frac{1}{2}-t\right)$ (3)略 (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解：(1) P 為 $\overline{CG}$ 中點 $\Rightarrow P\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

(2) $Q(1,1,t) \Rightarrow \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QP}=\left(-1,0,\frac{1}{2}-t\right)$

(3)錐體體積 $=A-QPG+A-RPG$

$$=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AQ}\\\overrightarrow{AP}\\\overrightarrow{AG}\end{matrix}\right\|+\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AQ}\\\overrightarrow{AP}\\\overrightarrow{AG}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & t\\-1 & 1 & \frac{1}{2}\\-1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|+\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1 & 0 & \frac{1}{2}-t\\-1 & 1 & \frac{1}{2}\\-1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，與 t 無關

(4) ΔAQP 面積 $=\frac{1}{2}\left|\left(0,1,\frac{1}{4}\right)\times\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{3\sqrt{2}}{8}$

$$d(G-AQP)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$