

新北市立高級中等學校 109 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

考生作答說明：

- 一、請先檢視答案卷准考證號碼、姓名是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。
- 二、本試題計有：填充題 10 題，計算證明題 2 題。
- 三、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。

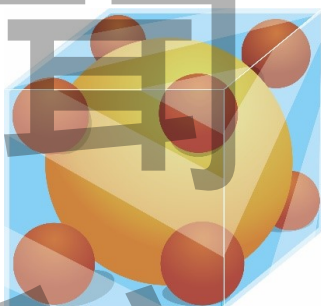
稿
專
用

新聞稿專用

新北市立高級中等學校 109 學年度教師聯合甄選 數學科試題

一、填充題：70%，每題 7 分。

1. 某一燈塔裝置了紅、黃、藍、綠、紫五種不同顏色的燈，每晚會點亮其中一種燈，且每一晚都是從前一晚未點過的四種燈中隨機點亮一種。設第 1 晚點亮紅色燈，則第 6 晚也點亮紅色燈的機率為_____（以最簡分數表示）。
2. 設集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ 共 102 個數， B, C 為另 2 個集合，滿足 $B \cup C = A$ ，則這樣的 (B, C) 共有_____組。
3. 一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內放置一顆半徑為 1 單位的黃球，然後又在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球，如下圖所示：



試求：小紅球的最大半徑為_____單位。

4. 設 a, b 為正整數，若 a^{20} 為 31 位數， $(\frac{1}{b})^{20}$ 自小數點以下 25 位才不為 0，則 $(ab)^5$ 是_____位數。
5. 將 10 個相同的小球裝入 3 個編號為 1、2、3 的盒子（每次要把 10 個球裝完），要求每個盒子裡球的個數不少於盒子的編號數，這樣的裝法種數共有_____種。
6. 設 Q_1, Q_2 為以原點 $O(0, 0)$ 為圓心的單位圓和 x 軸的兩交點。若上半圓上兩點 P_1 和 P_2 滿足 $\angle P_1OP_2 = 45^\circ$ ，則 $\triangle P_1OQ_1$ 和 $\triangle P_2OQ_2$ 面積和的最大值為_____。
7. 點 P 到一單位圓圓心距離為 3， P 到該單位圓內接正三角形三頂點距離分別為 a, b, c ，則 $a^2 + b^2 + c^2$ 為一定數，此定數為_____。
8. 將多項式 $(1 + x^5 + x^7 + x^{12})^{20}$ 展開，則 x^{17} 的係數為_____。

9. 級數 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(2^{k+1} + (-1)^{k+1})(2^k + (-1)^k)}$ 之和為有理數，此有理數最簡分數為 _____。

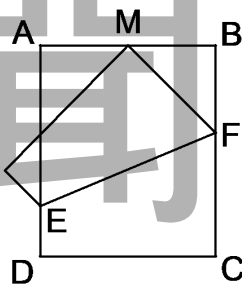
10. xy -平面上能滿足不等式：

$$|x^2 + y^2 - 2x + 4y - 18| \leq 2x - 2y + 18$$

之所有點所成的集合為 S ，則 S 的面積為 _____。

二、計算證明題：30%，每題 15 分。

1. 將長 $\overline{AB} = 240$ ，寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在線段 \overline{AB} 的中點 M 上，如下圖所示：



若 \overline{EF} 是摺線，則摺線 \overline{EF} 的長度為多少？

2. 空間中有點 $O(0, 0, 0)$ ， $A(5, -4, 3)$ 及平面 $E: x + 2y + 2z = 0$ ， P 是平面 E 上的動點。

(a) 求 $\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$ 的最大值。(10 分)

(b) 求此時 P 點座標。(5 分)

新聞稿專用