新竹市立建功高中109學年度第一次正式教師甄選【國中數學】試題卷

一、填充題(20題，每題4分，共80分)

1. 在一邊長為n的正方形方格中，以最左下的位置為起始點，向內螺旋的方式排列正整數，如圖所示，為$n=3$與$n=5$的排列結果。若$n=15$，試求左下至右上的對角線上所有元素的和為＿＿＿＿＿。

7	6	5
8	9	4
1	2	3

13	12	11	10	9
14	23	22	21	8
15	24	25	20	7
16	17	18	19	6
1	2	3	4	5

2. 若x為自然數，A，B，C，D為x的最小的四個相異正因數，且滿足$x=A^2+B^2+C^2+D^2$，試求$x=$＿＿＿＿＿。

3. 在坐標平面上，設圓$C:x^2+\left(y-2\right)^2=4$，有兩條切線方程式$L$和$M$，直線$L$的$x$截距$a$且$y$截距$2b$，直線$M$的$x$截距$2a$且$y$截距$b$，其中$a$與$b$均為正實數，試求數對$\left(a,b\right)$=＿＿＿＿＿。

4. 若$a=4\sin 20°+\tan 20°$且$b=\dfrac{1}{\sin 10°}-4\sin 70°$，則$\dfrac{a}{b}=$＿＿＿＿＿。

5. 將任意三位數重複寫兩次構成一個新的六位數，例如:135135、256256…。像這樣的六位數中，能被2821整除的最小數為＿＿＿＿＿

6. △ABC中，$\overline{CA}=\overline{CB}$且$\angle C=20°$，分別在$\overline{AC}$、$\overline{BC}$上取D點、E點，使得$\angle DAE=10°$、$\angle EBD=20°$，請問$\angle AED$的度數為＿＿＿＿＿。

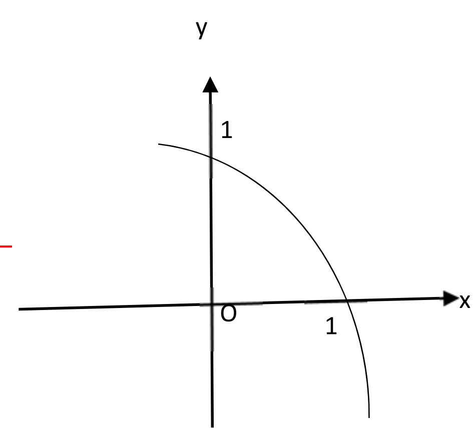
7. 設平面上有$\triangle ABC$與$\triangle PQR$，若$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+4\overrightarrow{RC}=\overrightarrow{AB}$，求$\triangle PQR$與$\triangle ABC$之面積比值＿＿＿＿＿。

8. 若有一枚**特製**的硬幣，出現反面機率為出現正面機率的兩倍，小明擲此硬幣8次，他從數線上的0開始，若投擲的錢幣出現正面，則向數線的正向走1單位；若出現反面，則向數線的負向走1單位。如果他在移動的過程中$\boxed{\text{曾經}}$達到數線正向4的機率為何＿＿＿＿＿。

9. $\sqrt{2499}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$，且A<B<1000，則B-A之值為＿＿＿＿＿

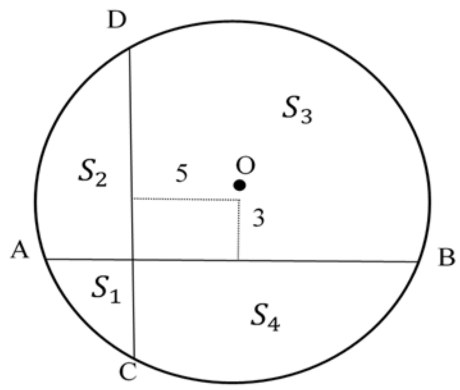
10. 設直線$(n+1)x+ny=\sqrt{2}$ (n*為自然數*)與兩坐標軸圍成的三角形面積S_n $(n=1,2,3,\dots,2020)$，則$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2020}$的值為＿＿＿＿＿

11. 二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形一部分如圖所示，則a值的範圍為＿＿＿＿＿



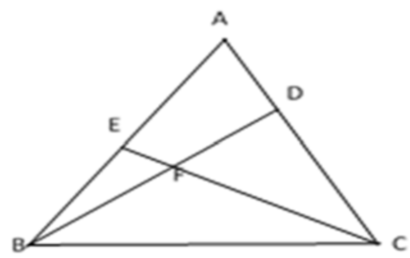
12 如圖，圓 O 中兩條互相垂直的弦將圓 O 分成四部分:S_1、S_2、S_3、S_4。若$\overline{AB}$和$\overline{CD}$的弦心距分別為 3 和 5，

則$(S_1+S_3)-(S_2+S_4)=$____________

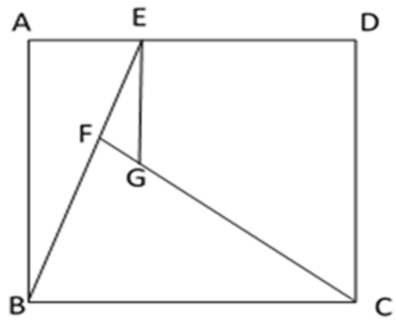


13. 設 D、E 分別在$\triangle$ABC 的$\overline{AC}$和$\overline{AB}$上，$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=1$、$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{2}{3}$，若$\triangle$ABC 的面積為 40，則四邊形 AEFD 的面積為

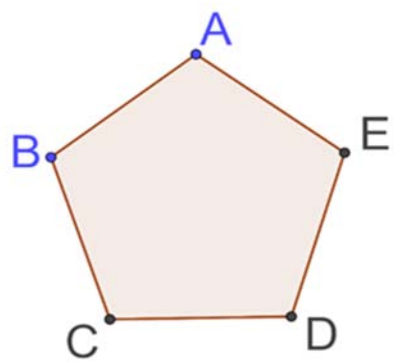
____



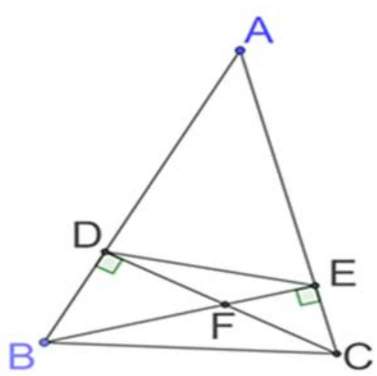
14. 正方形 ABCD，其中$\overline{CB}=\overline{CF}$、$\overline{EG}//\overline{AB}$、$\overline{EG}=3$、$\overline{FG}=1$，求正方形邊長為何? _________



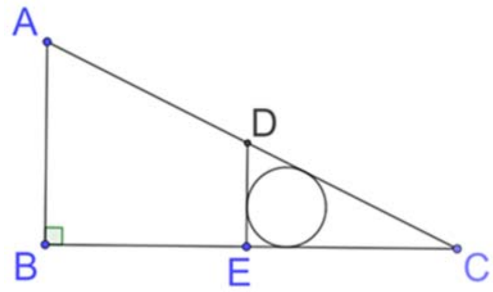
15. 如圖，在正五邊形 ABCDE 內取一點 F，使得$\overline{AF}=\overline{AE}$、$\overline{FC}\perp\overline{CD}$，求∠AFE =_________度。



16. 如圖，△ABC 中，$\overline{CD}$、$\overline{BE}$分別為兩邊上的高且交於 F 點。若$\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=5$、$\overline{DE}=3$，則$\overline{BE}$的長度為何？_______



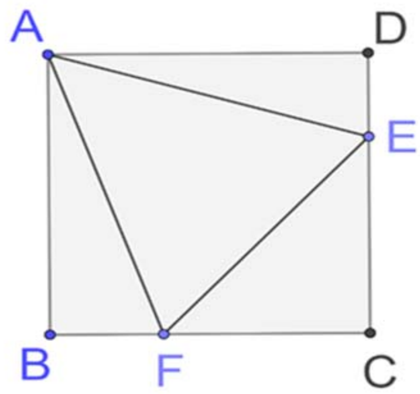
17 如圖，△ABC 中，∠B=90°，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，$\overline{BC}=40$，$\overline{AB}=30$，設△DEC 的內切圓半徑為$r$，且 $\overline{BE}=4r$，求半徑$r=$__________。



18. 直線L_1經A(1,1,0)、B(2,1,1)，直線L_2經C(1,1,1)、D(1,3,2)，另一直線L_3過E(2,0,1)且與L_1、L_2均相交，則L_2、L_3之交點坐標為__________。

19. 將長方形ABCD沿著對角線$\overline{AC}$摺起，使得平面ABC與平面ADC互相垂直，若$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$，試求$\overline{BD}=$__________。

20. 正方形 ABCD 中，△ABF、△CEF 及△DAE 的面積分別為 4、5、3，請問△AEF 的面積為何？

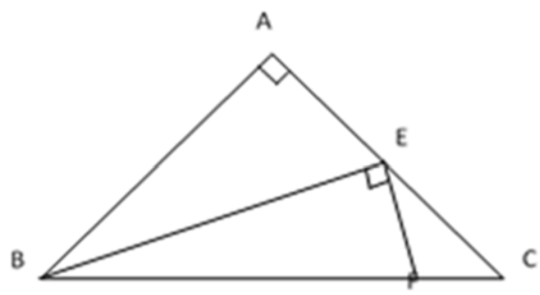


二、計算證明題(4 題，每題 5 分，共 20 分)

1. 已知 $f(x)=|\log x|$，若 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$，其中 a，b 為實數，證明：$a+2b>3$。

2. 有一平行四邊形 ABCD，若過頂點 A 作一圓，且分別交$\overline{AB}$、$\overline{AD}$及對角線$\overline{AC}$或其延長線於 E 點、F 點、G 點。請利用托勒密定理證明：$\overline{AC}\times\overline{AG}=\overline{AB}\times\overline{AE}+\overline{AD}\times\overline{AF}$

3. 等腰直角三角形ΔABC中，ΔABC 的面積為 1、$\angle A=90^o$，E 為$\overline{AC}$的中點，F 在$\overline{BC}$上，且$\overline{EF}\perp\overline{BE}$，求$\Delta$CEF 的面積?



4. 實係數方程式$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$有四根為α、β、γ、ω，其中$\alpha+\beta=3+4i$且$\gamma\omega=5+2i$，則 $a+b+c+d=$ __________。