109 高雄聯招

一、計算題：

1. 已知一個五次多項式函數 $f(x)$，領導係數為 1，常數項為 -217，且滿足 $f(1)=1$，$f(2)=3$，$f(3)=5$，$f(4)=7$，則 $f(5)=$？

【詳解】：設 $f(x)=2x-1+(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x+k)$

$\because$ 常數項為 -217

$\therefore f(0)=-1+24k=-217 \Rightarrow k=-9$

即 $f(5)=2\cdot 5-1+(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-9)=\underline{\underline{-87}}$

2. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形上斜率最小的切線 $g(x)=f'(-2)(x+2)+10$，若 $\int_{-a}^{a} g(x)=0$，試求 $f(x)=$？

【詳解】：領導係數為正的三次實係數多項式函數

其斜率最小的切線必過反曲點

$\because$ 此切線為 $g(x)=f'(-2)(x+2)+10 \Rightarrow y-10=f'(-2)(x+2)$

$\therefore$ 反曲點在 $x=-2$ 時，且 $\begin{cases} f(-2)=10 \\ f''(-2)=0 \end{cases}$

已知 $f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$

即 $\begin{cases} (-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c=10 \\ 6(-2)+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2b-6 \cdots\cdots ① \\ a=6 \end{cases}$

又 $\int_{-a}^{a} g(x)=0 \Rightarrow y=g(x)$ 為奇函數且過原點

由 $y=g(x)$ 過 $(-2,10)$ 與 $(0,0) \Rightarrow$ 斜率 $f'(-2)=\dfrac{10-0}{(-2)-0}$

$\Rightarrow 3(-2)^2+2a(-2)+b=-5 \Rightarrow b=4a-17=7$

代回 ① 可得 $c=8 \Rightarrow f(x)=\underline{\underline{x^3+6x^2+7x+8}}$

3. $(x+\sqrt{3})^{21}+(1-x)^{32}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{32}x^{32}$，若 $a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{32}=2^k$，則 $k=$？

【詳解】：$x=i$ 代入得 $(i+\sqrt{3})^{21}+(1-i)^{32}=a_0+a_1i+a_2i^2+\cdots+a_{32}i^{32}$

實部即 $a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{32}$

$\because (i+\sqrt{3})^{21}+(1-i)^{32}$

$=[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)]^{21}+[\sqrt{2}(\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ)]^{32}$

$\therefore$ 實部：$a_0-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{32}=2^{21}\cos 630^\circ+2^{16}\cos 1440^\circ=2^{16}$

$\Rightarrow k=\underline{\underline{16}}$

4. 由$1,2,3,\ldots,20$挑出x_1,x_2,x_3三個數，且$x_1<x_2<x_3$，求x_1與x_2至少差4，x_2與x_3至少差5的機率為何？

【詳解】：視為3〇與17╳排成一列，且滿足下列條件：

① 第一個〇之前有y_1個╳

② 第一個〇與第二個〇之間有y_2個╳

③ 第二個〇與第三個〇之間有y_3個╳

④ 第三個〇之後有y_4個╳

則$y_1+y_2+y_3+y_4=17$，y_1,y_2,y_3,y_4為非負整數且$y_2\geq 3$、$y_3\geq 4$

$$\Rightarrow \text{機率}=\frac{H^4_{17-3-4}}{C^{20}_3}=\frac{C^{13}_{10}}{C^{20}_3}=\frac{286}{1140}=\underline{\underline{\frac{143}{570}}}$$

5. 求$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{100}}{3}\right]$之值，其中$[a]$表示不超過$a$的最大整數。

【詳解】：$\because \dfrac{2^n}{3}=\dfrac{(3-1)^n}{3}=\dfrac{C^n_0 3^n-C^n_1 3^{n-1}+C^n_2 3^{n-2}-C^n_3 3^{n-3}+\cdots+C^n_n(-1)^n}{3}$

$$=\frac{3K+(-1)^n}{3}=K+\frac{(-1)^n}{3}\text{，}K\in Z$$

① n為偶數時，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\left[K+\dfrac{1}{3}\right]=K=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{1}{3}$

② n為奇數時，$\left[\dfrac{2^n}{3}\right]=\left[K-\dfrac{1}{3}\right]=K-1=\left(\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{1}{3}\right)-1=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{100}}{3}\right]$$

$$=\left(\frac{2^0}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2^4}{3}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{100}}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$+\left(\frac{2^1}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2^5}{3}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{99}}{3}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{100})-\frac{1}{3}\times 51-\frac{2}{3}\times 50$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2^0(2^{101}-1)}{2-1}-\frac{1}{3}\times 51-\frac{2}{3}\times 50=\underline{\underline{\frac{2^{101}-152}{3}}}$$

6. 若實數a,b,c滿足$\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{8}+\dfrac{c}{11}=\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{9}+\dfrac{c}{12}=\dfrac{a}{7}+\dfrac{b}{10}+\dfrac{c}{13}=2$，則$a+b+c=$？

【詳解】：令$\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+3}=2$，通分得$\dfrac{(a+b+c)x^2+3(a-c)x-9b}{x^3-9x}=2$

$\Rightarrow (a+b+c)x^2+3(a-c)x-9b=2x^3-18x$

$\Rightarrow 2x^3-(a+b+c)x^2-3(6+a-c)x+9b=0$

即方程式$2x^3-(a+b+c)x^2-3(6+a-c)x+9b=0$的三根為$8,9,10$

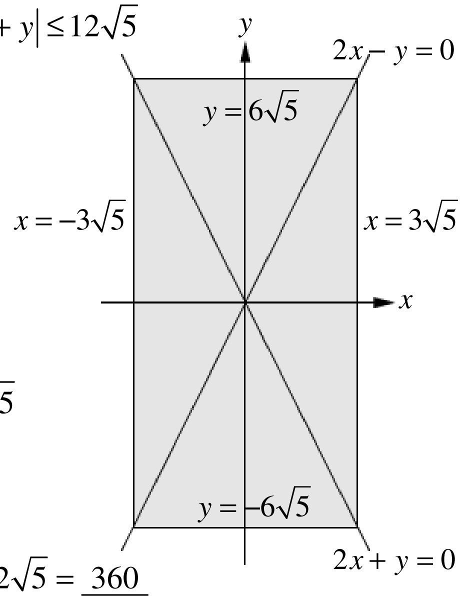
由「根與係數」，三根和：$8+9+10=\dfrac{a+b+c}{2}\Rightarrow a+b+c=\underline{\underline{54}}$

7. 在坐標平面上，到兩直線$y=2x$及$y=-2x$的距離之和小於或等於12的點所形成之區域面積為？

【詳解】：設$P(x,y)$、$L_1:y=2x$、$L_2:y=-2x$

$\because d(P,L_1)+d(P,L_2)\le 12$

$\therefore \dfrac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}+\dfrac{|2x+y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\le 12\Rightarrow |2x-y|+|2x+y|\le 12\sqrt{5}$



① $2x-y\ge 0$且$2x+y\ge 0$時，

原式：$(2x-y)+(2x+y)\le 12\sqrt{5}\Rightarrow x\le 3\sqrt{5}$

② $2x-y\le 0$且$2x+y\ge 0$時，

原式：$-(2x-y)+(2x+y)\le 12\sqrt{5}\Rightarrow y\le 6\sqrt{5}$

③ $2x-y\le 0$且$2x+y\le 0$時，

原式：$-(2x-y)-(2x+y)\le 12\sqrt{5}\Rightarrow x\ge -3\sqrt{5}$

④ $2x-y\ge 0$且$2x+y\le 0$時，

原式：$(2x-y)-(2x+y)\le 12\sqrt{5}\Rightarrow y\ge -6\sqrt{5}$

由①～④，作圖如右，所圍區域面積為$6\sqrt{5}\times 12\sqrt{5}=\underline{\underline{360}}$

8. 求兩曲線$y=x^3-3x+1$，$y=x^3-3x+33$的公切線方程式？

【詳解】：令$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^3-3x+33$

則$f'(x)=g'(x)=3x^2-3$

設在$f(x)$之切點為(a,a^3-3a+1)，在$g(x)$之切點為$(b,b^3-3b+33)$

$\because$公切線之斜率：$f'(a)=g'(b)\Rightarrow 3a^2-3=3b^2-3\Rightarrow a=\pm b$

取$a=-b$(兩切點不發生在同一鉛直線上)

$\therefore$公切線之斜率：$g'(b)=\dfrac{(b^3-3b+33)-(a^3-3a+1)}{b-a}$

$\Rightarrow 3b^2-3=\dfrac{(b^3-3b+33)-((-b)^3-3(-b)+1)}{b-(-b)}\Rightarrow b=2$

即公切線為$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Rightarrow y-35=9(x-2)\Rightarrow \underline{\underline{y=9x+17}}$

9. 一個袋子內有1顆紅球與3顆白球。小明每次從此袋中取一球後再放回，連取12次，若取出k次紅球可獲得$k(k+2)$元的獎金，則小明所獲得獎金的期望值為多少？

【詳解】：隨機變數k為二項分布，參數$(n,p)=\left(12,\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow E(k)=np=3$，且$Var(k)=np(1-p)=\frac{9}{4}$

又$Var(k)=E(k^2)-[E(k)]^2 \Rightarrow E(k^2)=Var(k)+[E(k)]^2=\frac{45}{4}$

所求$=\sum_{k=0}^{12}\left[P(\text{共取出}k\text{次紅球})\times k(k+2)\right]$

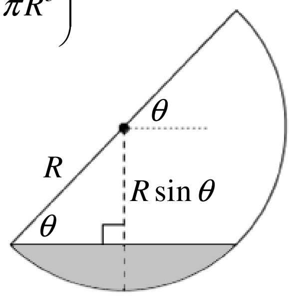
$=\sum_{k=0}^{12}\left[P(\text{共取出}k\text{次紅球})\times k^2\right]+2\sum_{k=0}^{12}\left[P(\text{共取出}k\text{次紅球})\times k\right]$

$=E(k^2)+2E(k)=\frac{45}{4}+2\times 3=\underline{\underline{\frac{69}{4}}}$

10. 一個盛滿水的半球形容器，將此半球形容器傾斜角θ，使容器內的水恰好倒掉全部的$\frac{23}{27}$，求$\sin\theta=$？

【詳解】：令球半徑為R，則半球形容器體積為$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$

如右圖所示



剩餘體積可視為函數$y=\sqrt{R^2-x^2}$

在$x=R\sin\theta$到$x=R$與x軸所圍區域

再繞x軸旋轉之體積

其值$=\int_{R\sin\theta}^{R}\pi y^2dx=\pi\int_{R\sin\theta}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R\sin\theta}^{R}$

$=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^3\sin\theta-\frac{R^3\sin^3\theta}{3}\right)\right]=\frac{2-3\sin\theta+\sin^3\theta}{3}\pi R^3$

依題意，$\frac{2-3\sin\theta+\sin^3\theta}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\times\frac{4}{27}$

$\Rightarrow 27\sin^3\theta-81\sin\theta+46=0$

$\Rightarrow (3\sin\theta-2)(9\sin^2\theta+6\sin\theta-23)=0$

$\because 9\sin^2\theta+6\sin\theta-23\le 9\cdot 1+6\cdot 1-23<0$

$\therefore 3\sin\theta-2=0\Rightarrow \sin\theta=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

11. 已知 $2^x+3^y+5^z=7$，$2^{x-1}+3^y+5^{z+1}=11$；若 $t=2^{x+1}+3^y+5^{z+1}$，試求 t 的範圍？

【詳解】：令 $A=2^x$、$B=3^y$、$C=5^z$，這裡 $A,B,C>0$

則 $\begin{cases} A+B+C=7\cdots\cdots ① \\ \dfrac{A}{2}+B+5C=11\cdots\cdots ② \end{cases}$

①−②得：$\dfrac{A}{2}-4C=-4 \Rightarrow A=8C-8$

代入①得：$(8C-8)+B+C=7 \Rightarrow B=-9C+15$

$\because \begin{cases} A=8C-8>0 \\ B=-9C+15>0 \end{cases} \Rightarrow 1<C<\dfrac{5}{3}$

$\therefore t=2A+B+5C=2(8C-8)+(-9C+15)+5C=12C-1$

$\Rightarrow 1\times 12-1<12C-1<\dfrac{5}{3}\times 12-1 \Rightarrow \underline{\underline{11<t<19}}$

12. 已知有10顆顏色不同的鋼珠，其中1公克重的鋼珠3顆、2公克重的鋼珠4顆、3公克重的鋼珠3顆。將它們分成兩堆，每堆各5顆且重量恰好都是10公克，則總共有幾種分法？

【詳解】：分成兩堆，每堆各5顆共10公克的組合

只有「$1+1+2+3+3$」搭配「$1+2+2+2+3$」

方法數 $=\overset{1公克}{C_2^3}\times\overset{2公克}{C_1^4}\times\overset{3公克}{C_2^3}=3\times 4\times 3=\underline{\underline{36}}$ (另一堆由剩餘的自動成堆)

二、計算題：

1. $\because (ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c)$

$=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)-(3a^2bc+3ab^2c+3abc^2)$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2)$

$=\dfrac{1}{2}[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2]\ge 0$ (這裡 a,b,c 均為實數)

$\therefore (ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

2. $x^8-x^5+x^2+x+1=0 \Rightarrow x^5(x^3-1)+(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x^5(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=0 \Rightarrow (x^2+x+1)(x^6-x^5+1)=0$

已知 $x^2+x+1=0$ 無實根

令 $g(x)=x^6-x^5+1$，則 $g'(x)=6x^5-5x^4=x^4(6x-5)$

$\because$

x		0		$\frac{5}{6}$	
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow g(x)$ 有最小值 $g\left(\dfrac{5}{6}\right)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^6-\left(\dfrac{5}{6}\right)^5+1>0$

$\therefore g(x)=x^6-x^5+1$ 恆正

即 $(x^2+x+1)(x^6-x^5+1)=0$ 無實根 $\Rightarrow x^8-x^5+x^2+x+1=0$ 無實根