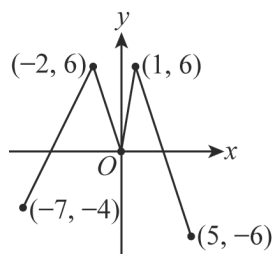


# 彰化縣立彰化藝術高中暨田中高中 100 學年度教師甄試數學科試題

## 一、單選題(每題 5 分，共 60 分)

- ( ) 1. 設  $p, q \in \mathbb{R}$  且  $p > 0, q > 0$ ，若  $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$ ，則  $\frac{q}{p}$  之值介於下列哪一個區間？  
(A)  $(1, \frac{3}{2})$  (B)  $(\frac{3}{2}, 2)$  (C)  $(2, \frac{5}{2})$  (D)  $(\frac{5}{2}, 3)$  (E)  $(3, \frac{7}{2})$
- ( ) 2. 將 1、2、3、...、9 此 9 個正整數隨機填入  $3 \times 3$  之棋盤形 9 個格子中，每一格填一個數字，且每個數字只填一次，求使每一行，每一列（不含對角線）之數字和皆為奇數之機率為何？  
(A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{11}$  (C)  $\frac{1}{12}$  (D)  $\frac{1}{13}$  (E)  $\frac{1}{14}$
- ( ) 3. 設複數  $z$  滿足  $|z| = 2$ ，若  $\left| z + \frac{2}{z} - 1 \right| = n$ ，且  $n$  為整數，則  $n$  所有可能值的和為  
(A) 6 (B) 10 (C) 15 (D) 21 (E) 28
- ( ) 4. 袋中有 15 個球，其中有紅球 5 個，編號 1 至 5，白球 10 個，編號 1 至 10，任意取兩球，試求球號之和小於 7 的機率 (A)  $\frac{1}{7}$  (B)  $\frac{23}{105}$  (C)  $\frac{5}{21}$  (D)  $\frac{9}{35}$  (E)  $\frac{29}{105}$
- ( ) 5. 在  $xy$  平面上，有多少條直線與  $x$  軸的截距為正質數，與  $y$  軸的截距為正整數且通過點  $(4, 3)$  (A) 0  
(B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- ( ) 6. 由 1 至 99 的九十九個整數中，任取三個相異數，則此三數恰成等差數列的取法有多少種？  
(A) 1001 (B) 1024 (C) 1600 (D) 1960 (E) 2401
- ( ) 7. 設  $a, b$  為實數，方程式  $x^2 + 2ax + b = 0$  沒有實根，且各根之絕對值均為 1，則  $b$  之值為何？  
(A) 1 (B)  $\sqrt{3}$  (C) 2 (D)  $\sqrt{5}$  (E)  $\sqrt{6}$
- ( ) 8. 設  $n$  為自然數， $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n \sqrt{3}$ ， $x_n, y_n$  均為正整數，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$  之值為 (A) 0 (B) 1  
(C)  $-\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$  (E)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ( ) 9. 空間中有三個點  $A(-1, 2, 5)$ ， $B(-2, 1, 2)$ ， $P(0, b, c)$ ，則  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$  的最小值為  
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
- ( ) 10. 函數  $f$  的圖形如下所示，則方程式  $f(f(x)) = 6$  的實數解有幾個？ (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



( )11. 自圓  $C: x^2 + y^2 = 4$  上取二點  $A, B$ ，使此二點均在  $x$  軸上方，且折回劣弧  $AB$  恰與  $x$  軸切於點  $(1, 0)$ ，求  $\overline{AB}$  方程式為何？(A)  $2x - 4y - 5 = 0$  (B)  $3x - 4y + 5 = 0$  (C)  $2x + 3y - 5 = 0$  (D)  $2x + 3y + 5 = 0$  (E)  $2x + 4y - 5 = 0$

( )12. 設  $a, b, c$  為 0 到 9 的整數， $a, b, c$  不可同時為 0 且不可同時為 9。若將循環小數  $0.\overline{abc}$  化為最簡分數時，則分母有多少種情形？(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

## 二、計算題(每個答案 5 分，共 40 分)

1. 已知  $P$  為正方形  $ABCD$  內部的一點，若  $\overline{AP} = 7, \overline{BP} = 5, \overline{CP} = 1$ ，試求正方形  $ABCD$  的面積。

2. 連續擲出一個公正的正六面體骰子  $n$  次，將前  $n$  次出現的點數依序寫在小數點的後面，得到一個實數  $a_n$ ，例  $a_1 = 4$ ，

$a_2 = 0.43$ ， $a_3 = 0.435$ ， $\dots$ ，對於實數  $k$ ，若符號  $p_n(k)$  代表「 $a_n$  以  $k$  為尾的機率」，試求：

(1)  $p_{2011}(\frac{1}{7})$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\frac{41}{333})$

3. 若  $\{x \mid 1 \leq \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{x-k} \leq 2\}$  的解集合為若干區間的聯集，求區間的總長度

4. 設  $a, b, c, d, e, f$  均為實數且  $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ ， $d^2 + e^2 + f^2 = 6$ ，則行列式  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  的最大值為\_\_\_\_\_

5. 已知可微分函數  $f(x)$  滿足  $f(x) = 2f(2-x) - x^2 - 4x + 2$ ，若  $y = f(x)$  的圖形在點  $(0, f(0))$  處的切線方程式為  $L$ ，求：

(1)  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$  (2)  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 切線方程式  $L$  為  $y = \underline{\hspace{2cm}}$