桃園市立高級中等學校109學年度教師聯合甄選筆試試題

科目：數學科

說明：本試卷共分填充題及計算或證明題二部份。第一部份：填充題占65%；第二部份：計算或證明題占35%。請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案卷」上，依題號作答，修正時應使用修正液(帶)。答案卷因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議。於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案卷一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第壹部份：填充題　（共13格，每格5分，占65分）

說明：作答時請將答案依照順序寫在答案卷上。

1. 方程式$x^4+(m-5)x^2+(m+3)=0$有相異4實根，則m的範圍 ＿＿(1)＿＿。
2. 設n為整數，若$\dfrac{4^n}{15^n}$化成小數時在小數點後第7位以前皆為0，第8位始不為0，則$n=$＿＿(2)＿＿。（log2=0.3010，log3=0.4771）
3. 將6封不同信件投入3個相異郵筒，每個郵筒至少有一封信件的方法數為＿＿(3)＿＿。
4. $\int_5^{12}\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=$＿＿(4)＿＿。
5. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{n^k+k^2}{k!}=$＿＿(5)＿＿。
6. 設隨機變數X表示連續投擲公正銅板直到出現連續二次反面就停止的次數，則X之期望值=＿＿(6)＿＿，X之變異數 =＿＿(7)＿＿。
7. 已知$(1-\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$，其中$a_n$、$b_n$為整數。則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$的值＿＿(8)＿＿。
8. 已知數列$\{a_n\}$為一個等差數列，首項與公差均為正的實數，且a_2,a_4,a_7依次成等比數列，則使得$a_1+a_2+\cdots+a_k>100a_1$的最小正整數$k$的值為＿＿(9)＿＿。
9. 某棋類比賽中，每位選手都恰好與其他選手比賽一局，每局贏者得2分，輸者得0分，如果平手，兩位選手各得1分。今有四位同學統計了比賽中全部選手得分總數，分別為155、156、157、158，經過確認，確實有一位同學統計無誤，試問這次比賽中共有＿＿(10)＿＿位選手參加。
10. 平面上的n條直線，最多可以把這個平面劃分成＿＿(11)＿＿塊不同的區域。

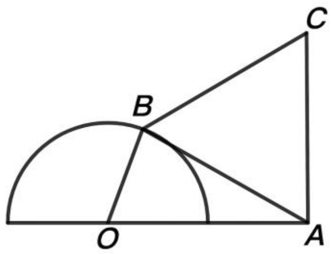
11. 已知$f(x)=a\tan^3 x+b\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$，且$f(3)=5$，
求$f(2\pi-3)$的值____(12)____。

12. 設x、y、z為不全為0的實數，則$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值____(13)____。

第貳部份：計算或證明題 （共3題，占35分）

1. 設實數數列$\{a_n\}$滿足$2a_{n+1}=a_n^2-2a_n+4$，$n=1,2,\cdots$，
(a)求所有a_1的可能值，使得數列$\{a_n\}$收斂，它的收斂可能值又為何?（6 分）
(b)若$a_1=-2$，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$之值?（6 分）

2. 如圖示，半圓O的半徑為1，A為直徑延長線上的一點，$OA=2$，B為半圓上的任一點，以AB為一邊做等邊三角形ABC，
(a)求B在何位置時，四邊形$OACB$的面積最大？(6分)
(b)求此面積的最大值。(6分)



3. 證明：方程式$3x^5+7x-3=0$恰有一個實數根r，且存在唯一的嚴格遞增正整數數列$\{a_n\}$，使得$\frac{3}{7}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$。(11分)