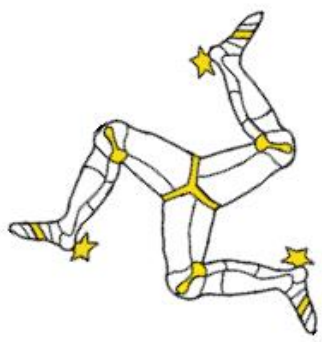
# 國立北科附工 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

## 一、填充題（每題 8 分，共 64 分）

1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = a_2 = 1$ ，且 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \ge 3)$ ，設 $b_n$ 為 $a_n$ 的個位數字，試求 $100b_{2020} + 10b_{2019} + b_{2018}$ 之值。

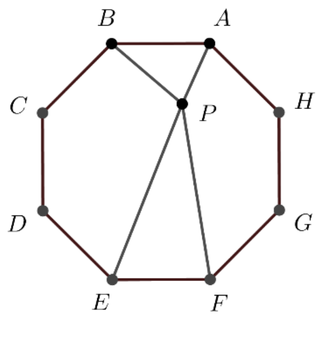
2. 三腿跑步圖是英屬地曼島的代表性標誌，它是由一隻穩健跑步的腿，透過旋轉形成一個無限循環卻永不摔倒的姿勢，如下圖所示：



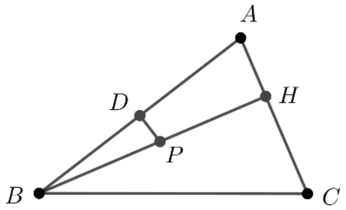
若將此三腿跑步圖的旋轉點（即三條腿共接的點）貼合在複數平面的原點，並發現一腳尖所對應的複數為 $2+8\sqrt{3}i$ ，則另外兩腿的腳尖所對應的複數為何？

3. 已知五邊形 $ABCDE$ 滿足 $\overline{AB}=2$ 、$\overline{BC}=2\sqrt{3}$ 、$\overline{CD}=4$ 、$\overline{DE}=2$ 、$\overline{EA}=4+2\sqrt{3}$ ，$\angle A = 90^\circ$ 、$\angle ABC = 120^\circ$ 、$\angle BCD = 120^\circ$ 、$\angle CDE = 150^\circ$ 、$\angle DEA = 60^\circ$，試求五邊形的面積。

4. 已知正八邊形 $ABCDEFGH$ ，其內部一點 $P$ 滿足 $\Delta ABP$ 的面積為 8 ， $\Delta EFP$ 的面積為 24 ，試求此正八邊形的面積。




5. 如圖，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=2\sqrt{10}$ ，且 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{AC}$ 邊上的高，其交點為 $P$ ，若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，試求數對 $(x, y)$ 。



# 國立北科附工 109 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

6. 同時擲四顆骰子，若點數最大是 $M$ ，點數最小是 $l$ ，求 $M-l>1$ 的機率。

7. 由上而下畫出三條平行線，第一條和第二條之間的距離為 $d_1$ ，第二條和第三條之間的距離為 $d_2$ ，若在三條平行線上各取一點形成一個正三角形，試求正三角形的邊長。

8. 設 $a$ 為實數，若對於所有實數 $x$ ， $\left|\dfrac{x^2+ax+3}{x^2+x+2}\right|<2$ 恆成立，則 $a$ 的範圍為？

二、計算證明題（每題 18 分，共 36 分）

1. 如果 $p, q, r$ 是三個相異的質數且滿足

$$\begin{cases}(p-1)\mid(pqr-1)\\(q-1)\mid(pqr-1)\\(r-1)\mid(pqr-1)\end{cases}$$

則稱合成數 $pqr$ 為卡邁克爾數。試確定所有 $r=3$ 的卡邁克爾數。

2. 若 $a$ 是一個有理數且滿足

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+a}=\alpha\sqrt[3]{4}+\beta\sqrt[3]{2}+\gamma,$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 為有理數。試求 $\alpha,\beta,\gamma$ (用 $a$ 表示)