

臺東縣 107 學年度國民中學特殊教育（含資賦優異）教師聯合甄選

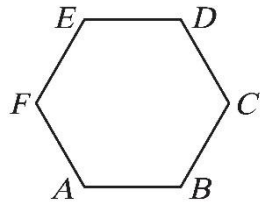
科目：數學科

- 若實數  $x, y$  滿足  $x^2 + y^2 = 1$ ，則  $(1-xy)(1+xy)$  的最小值為何？  
 (A) 2      (B)  $\frac{3}{2}$       (C) 1      (D)  $\frac{3}{4}$
- 設  $\vec{a}, \vec{b}$  為非零向量。若  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$ ，且  $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$ ，則  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為何？  
 (A)  $\frac{\pi}{3}$       (B)  $\frac{\pi}{4}$       (C)  $\frac{\pi}{6}$       (D)  $\frac{\pi}{2}$
- 若方程式  $(x-2)(x-3) + (x-3)(x-4) + (x-4)(x-2) = 0$  的兩根為  $a$  與  $b$ ，則  $\frac{8}{(2-a)(2-b)} + \frac{27}{(3-a)(3-b)} + \frac{64}{(4-a)(4-b)} = ?$   
 (A) 38      (B) 27      (C) 17      (D) 8
- 在圓  $x^2 + y^2 = 1$  上取一點  $A$ ，在平面  $E: 3x + 4y + 12z = 12$  上取一點  $B$ ，若使得  $\overline{AB}$  有最小值  $m$ ，則  $m = ?$   
 (A)  $\frac{11}{15}$       (B)  $\frac{9}{14}$       (C)  $\frac{7}{13}$       (D)  $\frac{5}{12}$
- 某橢圓的中心在點  $(1, -1)$ ，且長軸與直線  $x + y = 0$  平行。若長軸長為 6，短軸長為 4，且此橢圓的方程式可以表示為  $x^2 + 2xy + y^2 + ax + by + c = 0$ ，則  $a + b + c = ?$   
 (A)  $7\sqrt{5} - 3$       (B)  $7\sqrt{3} - 5$       (C)  $9\sqrt{3} - 20$       (D)  $9\sqrt{2} - 18$
- 設在  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  分別為角  $A, B, C$  對邊的邊長，且  $2a \sin A = (2a + c) \sin B + (2c + b) \sin C$ ，則  $\sin B + \sin C$  的最大值為何？  
 (A) 4      (B) 3      (C) 2      (D) 1
- 若  $z + z^{-1} = 1$ ，則  $z^{2018} + z^{-2018} = ?$   
 (A) 1      (B)  $\frac{1}{2}$       (C) 0      (D) -1
- 在 3 和 9 之間插入兩個正數，使得前三數成等比數列，後三數成等差數列，則這兩個正數之和為何？  
 (A)  $13\frac{1}{2}$       (B)  $11\frac{1}{4}$       (C)  $10\frac{1}{2}$       (D) 10
- 在直線  $x - 3y - 2 = 0$  找兩點使得他們與點  $(-2, 2)$  可以形成一個正三角形，則此正三角形的邊長為何？  
 (A)  $4\sqrt{2}$       (B)  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$       (C)  $\frac{2\sqrt{30}}{3}$       (D)  $2\sqrt{3}$
- 若關於  $m$  的方程式  $m^2 - 2am + a + 6 = 0$  有二實數根  $x, y$ ，則  $(x-1)^2 + (y-1)^2$  的最小值為何？  
 (A)  $-12\frac{1}{4}$       (B) 2      (C) 8      (D)  $12\frac{1}{2}$
- 設集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ，試問集合  $A$  有多少個子集合（包含空集合）至多包含三個連續整數中的一個數？  
 (A) 125      (B) 127      (C) 129      (D) 131
- 設  $f(x) = x^2 + 8x + 8$ ，若  $R = \{(x, y) \mid f(x) + f(y) \leq 0 \text{ 且 } f(x) - f(y) \leq 0\}$ ，則  $R$  的面積為何？  
 (A)  $11\pi$       (B)  $10\pi$       (C)  $9\pi$       (D)  $8\pi$

13. 試問： $100!+1, 100!+2, 100!+3, \dots, 100!+99, 100!+100$  中，共有幾個數是質數？

- (A) 0      (B) 1      (C) 25      (D) 26

14. 設  $ABCDEF$  為一正六邊形，則下列各內積何者最大？



- (A)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$       (B)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$       (C)  $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$       (D)  $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$

15. 已知  $4x^2+12x+1=0$  的兩根為  $\alpha, \beta$ ，求  $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 =$

- (A) 4      (B) 2      (C) -2      (D) -4

16. 有甲、乙、丙三個水瓶，開始時分別裝有 1、2、3 公升的水。每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，然後再將丙瓶的水倒出一半到甲瓶。設經過長時間的多輪操作後，求乙瓶的水有多少公升？

- (A) 1.5      (B) 2      (C) 2.5      (D) 3

17. 若  $x, y$  都是整數，則稱  $(x, y)$  為一個格子點。設  $A(13, 17), B(19, 5)$ ，則在線段  $\overline{AB}$  上的格子點共有多少個？

- (A) 5      (B) 6      (C) 7      (D) 8

18. 投擲一枚均勻硬幣 8 次，在最初 3 次的投擲中曾出現正面的條件下，8 次投擲中恰出現 4 次的機率為何？

- (A)  $\frac{5}{32}$       (B)  $\frac{65}{256}$       (C)  $\frac{105}{256}$       (D)  $\frac{65}{224}$

19. 設一橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ ，點  $A(9, 5)$ ，焦點  $F$  在中心點的右側， $P$  為  $\Gamma$  上的動點，則  $\overline{PA} - \overline{PF}$  之最小值為何？

- (A) 5      (B) 8      (C)  $\sqrt{61}$       (D)  $4\sqrt{46} - 7$

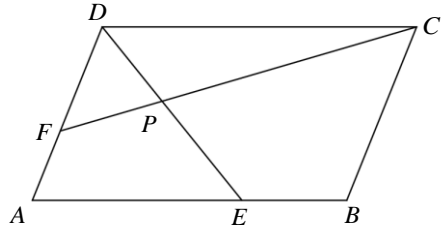
20. 有 10 間房間，第 1 間有 1 人，第 2 間有 2 人， $\dots$ ，第 10 間有 10 人，共 55 人；從這 55 人中任選 2 人，則此 2 人不在同一房間的選法共有幾種？

- (A) 1215      (B) 1320      (C) 1440      (D) 1485

21. 已知某三角形的二高分別為 4 與 12，若第三高之長為  $h$ ，則  $h$  介於下列哪一個範圍內？

- (A)  $2 < h < 5$       (B)  $3 < h < 6$       (C)  $4 < h < 7$       (D)  $5 < h < 8$

22. 平行四邊形  $ABCD$  中， $E, F$  分別在  $\overline{AB}, \overline{AD}$  上，使得  $\overline{AE} = 2\overline{BE}$ ， $3\overline{AF} = 2\overline{DF}$ ；若  $\overline{DE}$  與  $\overline{CF}$  交於  $P$ ，若  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則  $x + y = ?$



- (A)  $-\frac{2}{7}$       (B)  $-\frac{3}{4}$       (C)  $\frac{2}{7}$       (D)  $\frac{3}{4}$

23. 下表各列、各行都成無窮等差數列，求此表中數字 2018 共出現多少次？

2	4	6	8	10	...
4	7	10	13	16	...
6	10	14	18	22	...
8	13	18	23	28	...
10	16	22	28	34	...
...	...	...	...	...	...

- (A) 9      (B) 10      (C) 11      (D) 12

24. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 共 10 個數字放入下方 2 列 5 行的格子內，每個格子恰好放入一個數字且數字不能重複，並規定：

- (1) 每一行下面的數字不能比上面大    (2) 每一列左邊的數字不能比右邊大

請問共有幾種填入數字的方式？


- (A) 42      (B) 44      (C) 46      (D) 48

25. 考慮平面坐標中，拋物線  $\Gamma: y^2 = x + 3$ ，直線  $L: y = x - 3$  與兩坐標軸在第一象限所圍成的有界區域為  $S$ ；則  $S$  繞  $x$  軸旋轉所得的旋轉體之體積為何？

- (A)  $9\pi$       (B)  $\frac{125}{6}\pi$       (C)  $27\pi$       (D)  $\frac{81}{2}\pi$