

# 2020 第 21 屆 AMC 10B

俞克斌老師 編授

1. 計算  $1 - (-2) - 3 - (-4) - 5 - (-6)$  的值為何？  
(A) -20 (B) -3 (C) 3 (D) 5 (E) 21

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：所求  $= 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 5$

2. 卡爾有 5 個邊長為 1 單位的正立方體，而凱特有 5 個邊長為 2 單位的正立方體。  
試問這 10 個正立方體的體積一共是多少立方單位？  
(A) 24 (B) 25 (C) 28 (D) 40 (E) 45

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(E)

解： $1^3 \times 5 + 2^3 \times 5 = 45$

3. 設  $w$  對  $x$  的比是  $4:3$ ， $y$  對  $z$  的比是  $3:2$ ，且  $z$  對  $x$  的比是  $1:6$ 。試問  $w$  對  $y$  的比是下列何者？  
(A)  $4:3$  (B)  $3:2$  (C)  $8:3$  (D)  $4:1$  (E)  $16:3$

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(E)

解：
$$\begin{cases} 4x = 3w \\ 3z = 2y \Rightarrow w : x : y : z = 16 : 12 : 3 : 2 \\ x = 6z \end{cases}$$

4. 一個直角三角形的兩個銳角分別是  $a^\circ$  與  $b^\circ$ ，其中  $a > b$  且  $a$  與  $b$  都是質數。試問  $b$  可能的最小值為何？  
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解： $a + b = 90$  且  $a > b$  且  $a$  與  $b$  都是質數  
 $(a, b) = (83, 7), (79, 11), (73, 17), (71, 19), (61, 29), (59, 31), (53, 37), (47, 43)$

5. 將 1 個棕色磁磚、1 個紫色磁磚、2 個綠色磁磚、以及 3 個黃色磁磚，由左至右排成一列。  
試問一共有多少不同的排法？(註：相同顏色的磁磚是無法區別的。)  
(A) 210 (B) 420 (C) 630 (D) 840 (E) 1050

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(B)

解：
$$\frac{7!}{1!1!2!3!} = 420$$

6. 美琪正在公路上開車，她注意到里程表顯示 15951(英里)，這個數是一個迴文數(即，由左往右唸與由右往左唸都是相同的數。)2 個小時後，里程表顯示了下一個較大的迴文數。試問在這 2 個小時期間，她的平均車速是每小時多少英里？  
(A) 50 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 70

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(B)

解：
$$\frac{16061 - 15951}{2} = 55$$

7. 在小於 2020 的正偶數且為 3 倍數的所有正整數中，一共有多少個完全平方數？  
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(A)

解：
$$(6t)^2 < 2020 \xrightarrow{t \in \mathbb{N}} t = 1, 2, 3, \dots, 7$$

8. 平面上有二定點  $P$  與  $Q$  且  $\overline{PQ} = 8$ 。試問在這個平面上有多少個點  $R$  使得  $\triangle PQR$  為面積 12 平方單位的直角三角形？  
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：以  $P$  為直角頂 ( $\overline{PQ} = 8$ 、 $\overline{PR} = 3$ ) 有 2 個  
以  $Q$  為直角頂 ( $\overline{PQ} = 8$ 、 $\overline{QR} = 3$ ) 有 2 個  
以  $R$  為直角頂 ( $\overline{PQ} = 8$ 、 $d(R, \overline{PQ}) = 3$ ) 有 4 個

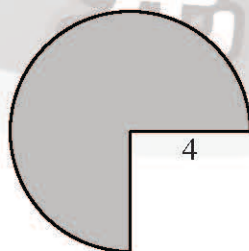
9. 試問有多少個有序整數對  $(x, y)$  滿足方程式  $x^{2020} + y^2 = 2y$ ？  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 無限多

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：原式  $\Rightarrow x^{2020} + (y-1)^2 = 1 \xrightarrow{x, y \in \mathbb{Z}} (x, y) = (1, 1), (-1, 1), (0, 2), (0, 0)$

10. 下圖所示的陰影部分，是一個半徑長 4 英寸之圓的四分之三部分所形成的扇形。將這個扇形圖形中所顯示的兩個半徑黏在一起，可形成一個直圓錐體的側面。試問這個直圓錐體的體積是多少立方英寸？  
(A)  $3\sqrt{5}\pi$  (B)  $4\sqrt{3}\pi$  (C)  $3\sqrt{7}\pi$  (D)  $6\sqrt{3}\pi$  (E)  $6\sqrt{7}\pi$



【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(C)



解：直圓錐體的底圓周長 = 扇形弧長 =  $4 \times \frac{3}{2}\pi = 6\pi$

直圓錐體的底圓半徑 = 3  $\Rightarrow$  直圓錐體的高 =  $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

直圓錐體的體積 =  $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}\pi$

11. 卡爾老師要求她的學生從一張列有 10 本書的書單中，選取 5 本閱讀。約翰和馬克分別從這書單中隨意各選取 5 本。試問他們二位恰選到相同二本書的機率為何？

(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{5}{36}$  (C)  $\frac{14}{45}$  (D)  $\frac{25}{63}$  (E)  $\frac{1}{2}$

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：  $\frac{C_2^5 C_3^5}{C_5^{10}} = \frac{25}{63}$

12. 在  $\frac{1}{20^{20}}$  的小數表示中，緊接在小數點後的一串數字都是 0，然後接一個 9 與其它一些數字。試問小數點後的這一串 0 一共有多少個？

(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：  $\log \frac{1}{20^{20}} = -20 \log 20 \approx -20 \times 1.3010 = -26.02 = -27 + 0.98$

表小數點後有 26 個零（亦即第 27 位起不為零）

13. 螞蟻安迪在坐標平面上走動，最初在點  $(-20, 20)$  且面向東方（即正  $x$  軸方向）。由此，安迪往前移動 1 單位然後向左轉  $90^\circ$ 。再來，安迪面向北方往前移動 2 單位後再向左轉  $90^\circ$ 。接著安迪面向西方往前移動 3 單位且再向左轉  $90^\circ$ 。安迪繼續這樣的過程：每次移動增加一個單位距離而且總是向左轉  $90^\circ$ 。試問安迪在第 2020 次左轉時其位置是在哪裡？

(A)  $(-1030, -994)$  (B)  $(-1030, -990)$  (C)  $(-1026, -994)$   
(D)  $(-1026, -990)$  (E)  $(-1022, -994)$

【2020 第 21 屆 AMC10B】

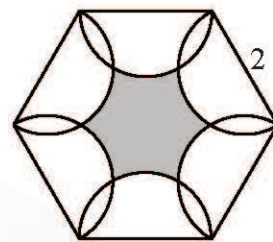
答：(B)

解：起步後每經過一輪（4 次轉彎），比前一輪座標沿向量  $(-2, -2)$  移動

所求 =  $\left( -20 - 2 \times \frac{2020}{4}, 20 - 2 \times \frac{2020}{4} \right) = (-1030, -990)$

14. 如下圖所示，六個半圓在一個邊長為 2 之正六邊形的內部而且每個半圓的直徑均與正六邊形的邊重合。試問圖中陰影區域(正六邊形的內部但在六個半圓的外部)的面積為何？

- (A)  $6\sqrt{3} - 3\pi$  (B)  $\frac{9\sqrt{3}}{2} - 2\pi$  (C)  $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$   
 (D)  $3\sqrt{3} - \pi$  (E)  $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$



【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解：  $6 \times \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right) - 6 \left( \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right) = 3\sqrt{3} - \pi$

15. 史帝夫將 1,2,3,4,5 依序由左至右重複寫下形成 123451234512... 等 10000 個數字的列表。然後他將這個列表中的每第三個數字擦掉(即，從左算起擦掉第 3 個、第 6 個、第 9 個...)。然後他又將剩下的列表中的每第四個數字擦掉(即，剩下的列表中、從左算起擦掉第 4 個、第 8 個、第 12 個...)。然後再將剩下的列表中的每第五個數字擦掉。試問最後剩下列表中的第 2019 個、第 2020 個、第 2021 個等三個數字的和是多少？

- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：

解：依題意結果為：1、2、4、2、5、3、4、1、5、2、5、1  
 1、2、4、2、5、3、4、1、5、2、5、1  
 1、2、4、2、5、3、4、1、5、2、5、1  
 (每 12 項一循環)

第 2019 個、第 2020 個、第 2021 個數，恰等同第 3 個、第 4 個、第 5 個數  
 所求 =  $4 + 2 + 5 = 11$

16. 貝拉與珍妮在實數線的閉區間  $[0, n]$  中玩選取數字比賽遊戲，其中  $n$  為大於 4 的一個固定整數。方法如下：他們二人輪流玩，由貝拉開始。在第一輪，貝拉在區間  $[0, n]$  中任意選取一個實數。自此之後，輪到比賽的人要選取一個實數，使得這個數必須與這兩位遊戲者選取過的所有的數之距離均超過一個單位以上。如果比賽者無法選到這樣的數就輸掉這場遊戲。試問若使用最佳策略，哪一位比賽者會贏得遊戲？

- (A) 貝拉總是會贏。  
 (B) 珍妮總是會贏。  
 (C) 貝拉會贏的充要條件為  $n$  是奇數。  
 (D) 珍妮會贏的充要條件為  $n$  是奇數。  
 (E) 珍妮會贏的充要條件為  $n > 8$ 。

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(A)

解：由於貝拉是先操作，故他只要選  $[0, n]$  中點  $\frac{n}{2}$  的實數

不論珍妮選擇任一側，貝拉都作對稱位置的操作  
 所以貝拉總是會贏



17. 有 10 個人等距圍繞在一個圓周上，每一個人恰認識其他 9 人中的 3 人，這 3 人就是與他相鄰的 2 人以及在圓上跟他正對面的人。試問有多少種不同方法可以將這 10 個人分成 5 對，使得每一對中的人彼此都認識？  
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(C)

解：將所有位置編號為 0 ~ 9

$$\begin{array}{l} \left\langle \begin{array}{l} (01)(23)(45)(67)(89) \\ (12)(34)(56)(78)(90) \\ [05][16][27][38][49] \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{l} [05](12)(34)(67)(89) \\ [16](23)(45)(78)(90) \\ [27](34)(56)(89)(01) \\ [38](45)(67)(90)(12) \\ [49](56)(78)(01)(23) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{l} [05][16][27](34)(89) \\ [16][27][38](45)(90) \\ [27][38][49](56)(01) \\ [38][49][50](67)(12) \\ [49][50][61](78)(23) \end{array} \right\rangle \end{array}$$

共 13 組

18. 一個甕中有一個紅色球與一個藍色球，旁邊準備了一個裝有足夠多個紅色球與藍色球的箱子。喬治執行如下的操作四次：每次他從甕中隨意取出一球，然後從箱子取出一個相同顏色的球，並將這兩個相同顏色的球一起放回甕中。經過四次重複操作後，甕中會有六個球。試問甕中恰有三個紅色球與三個藍色球的機率為何？

- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{1}{2}$

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(B)

解： $\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{1}{5}$

19. 在某次紙牌遊戲中，從一副 52 張不同紙牌中分出 10 張給某個參賽者。若不計分牌順序，則所有可能的分法數可以寫成 158A00A4AA0，試問數字 A 是甚麼？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(A)

解： $C_{10}^{52} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 52 \times 17 \times 7 \times 47 \times 23 \times 5 \times 11 \times 43$

又  $26 \times 17 \times 7 \times 47 \times 23 \times 11 \times 43$  的個位數字，等同 158A00A4AA 的個位數字故 A 為 2

20. 設 B 是一個包含內部的長方體，其邊長分別是 1、3、4。對實數  $r \geq 0$ ，設  $S(r)$  為空間中所有與 B 中的點距離小於或等於  $r$  的點所成的集合。

若  $S(r)$  的體積可表為  $ar^3 + br^2 + cr + d$ ，其中  $a, b, c, d$  為正實數。

試問  $\frac{bc}{ad}$  之值為何？

(A) 6    (B) 19    (C) 24    (D) 26    (E) 38

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(B)

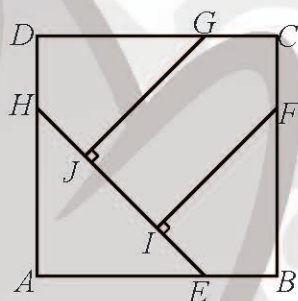
解： $S(r)$  的體積為  $1 \times 3 \times 4 + 2(1 \times 3 + 1 \times 4 + 3 \times 4) \times r + \pi r^2(1 + 3 + 4) + \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + 8\pi r^2 + 38r + 12$$

$$\frac{bc}{ad} \text{ 之值為 } \frac{8\pi \times 38}{\frac{4}{3}\pi \times 12} = 19$$

21. 在正方形  $ABCD$  中，點  $E$  與點  $H$  分別在  $\overline{AB}$  與  $\overline{DA}$  上使得  $\overline{AE} = \overline{AH}$ ，點  $F$  與點  $G$  分別在  $\overline{BC}$  與  $\overline{CD}$  上，以及點  $I$  與點  $J$  在  $\overline{EH}$  上使得  $\overline{FI} \perp \overline{EH}$  且  $\overline{GJ} \perp \overline{EH}$ ，如下圖所示。若三角形  $AEH$ 、四邊形  $BFIE$ 、四邊形  $DHJG$ 、以及五邊形  $FCGJI$  等四個區域的面積都是 1。試問  $\overline{FI}^2 = ?$

- (A)  $\frac{7}{3}$     (B)  $8 - 4\sqrt{2}$     (C)  $1 + \sqrt{2}$   
(D)  $\frac{7}{4}\sqrt{2}$     (E)  $2\sqrt{2}$



【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(B)

解：正方形總面積為 4，故正方形邊長為 2

故  $\overline{AE} = \overline{AH} = \sqrt{2}$ ，且  $\overline{CM} = 2\sqrt{2} - 1$  ( $M$  為  $\overline{IJ}$  中點)，

令  $\overline{CF} = \sqrt{2}x$ ，則  $\overline{IM} = x$ 、 $\overline{FI} = 2\sqrt{2} - 1 - x$

$$CFIM \text{ 面積} = \frac{(4\sqrt{2} - 2 - x)x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (2\sqrt{2} - 1) - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\overline{FI}^2 = (2\sqrt{2} - 1 - x)^2 = (2\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

解：正方形總面積為 4，故正方形邊長為 2

故  $\overline{AE} = \overline{AH} = \sqrt{2}$ ，且  $\overline{BE} = \overline{PN} = 2 - \sqrt{2}$  ( $N$  為  $\overline{CB}$ 、 $\overline{HE}$  交點)，

$$\text{則 } \left(\frac{\overline{FI}}{\overline{BE}}\right)^2 = \frac{1 + \Delta BEN}{\Delta BEN} \Rightarrow \overline{FI}^2 = 2 + \overline{BE}^2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

22. 試問  $2^{202} + 202$  除以  $2^{101} + 2^{51} + 1$  的餘數為何？

- (A) 100    (B) 101    (C) 200    (D) 201    (E) 202

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(D)

解： $x^{202} + 202 = (x^{101} + x^{51} + 1)Q(x) + R(x)$



$$\text{令 } x^{101} + x^{51} + 1 = 0 \Rightarrow x^{101} = -x^{51} - 1$$

則  $R(x)$  等同  $(-x^{51} - 1)^2 + 202 = x^{102} + 2x^{51} + 203$  除以  $x^{101} + x^{51} + 1$  的餘式

$$\text{則 } R(x) \text{ 等同 } x(-x^{51} - 1) + 2x^{51} + 203 = -x^{52} + 2x^{51} - x + 203$$

$$\text{所求餘數} = R(2) = 201$$

23. 正方形  $ABCD$  在坐標平面上，其四個頂點的坐標分別是  $A(1,1)$ 、 $B(-1,1)$ 、 $C(-1,-1)$ 、 $D(1,-1)$ 。考慮下面四種轉換：

- $L$  表繞著原點逆時針方向旋轉  $90^\circ$
- $R$  表繞著原點順時針方向旋轉  $90^\circ$
- $H$  表對  $x$  軸鏡射
- $V$  表對  $y$  軸鏡射

這四種轉換中每一種都會把這正方形映成至本身，

例如，先利用  $R$  然後再用  $V$  會把  $A(1,1)$  送到  $(-1,-1)$  且把  $B(-1,1)$  送到原來位置。

從  $\{L, R, H, V\}$  中，適當選取 20 個轉換組成的序列，可以把所有這四個頂點分別送回原來的位置。試問這樣的序列共有多少個？(例如， $R, R, V, H$  是一組四個轉換組成的序列，此序列轉換會把這四個頂點分別送回原來的位置。)

- (A)  $2^{37}$  (B)  $3 \cdot 2^{36}$  (C)  $2^{38}$  (D)  $3 \cdot 2^{37}$  (E)  $2^{39}$

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(C)

$$\text{解：} 4^{20} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4^{19}$$

24. 試問有多少個正整數  $n$  滿足  $\frac{n+1000}{70} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ？

(註： $\lfloor x \rfloor$  表示小於或等於  $x$  的最大整數。)

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 30 (E) 32

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(C)

$$\text{解：} \frac{n+1000}{70} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 70t + 50 \Rightarrow t + 15 = \lfloor \sqrt{70t + 50} \rfloor, \text{ 其中 } t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{但 } \sqrt{70t + 50} - 1 < t + 15 = \lfloor \sqrt{70t + 50} \rfloor \leq \sqrt{70t + 50}, \text{ 故 } t + 15 \leq \sqrt{70t + 50} < t + 16$$

$$\text{則 } 5 \leq t \leq 35 \text{ 且 } (t > 19 + \sqrt{149} \approx 31. \dots \text{ 或 } t < 19 - \sqrt{149} \approx 6. \dots), \text{ 其中 } t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{知 } t = 5, 6, 32, 33, 34, 35$$

$$\text{解：} \sqrt{n} - 1 < \frac{n+1000}{70} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} \Rightarrow \begin{cases} n - 70\sqrt{n} + 1070 > 0 \\ n - 70\sqrt{n} + 1000 \leq 0 \\ \frac{n+1000}{70} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 70t + 50 \end{cases},$$

$$\Rightarrow 20 \leq \sqrt{n} < 35 - \sqrt{155} \text{ 或 } 35 + \sqrt{155} < \sqrt{n} \leq 50$$

$$\Rightarrow 400 \leq n < \underbrace{1380 - 70\sqrt{155}}_{508.5\cdots} \text{ 或 } \underbrace{1380 + 70\sqrt{155}}_{2251.4\cdots} < n \leq 2500$$

$$n = 400, 470, 2290, 2360, 2430, 2500$$

25. 將正整數  $n$  寫成乘積  $n = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$ ，其中  $k \geq 1$ ， $f_i$  都是大於 1 的整數，且列式中的因數是有考慮次序的(即任意兩個因數次序不同的表示法是被視為相異的)。我們以  $D(n)$  表示在上述規定下，將  $n$  寫成各種乘積的所有方法數。例如，數字 6 可以寫成 6、 $2 \cdot 3$  與  $3 \cdot 2$ ，所以  $D(6) = 3$ 。試問  $D(96)$  為何？  
 (A) 112 (B) 128 (C) 144 (D) 172 (E) 184

【2020 第 21 屆 AMC10B】

答：(A)

解： $96 = 2^5 \times 3^1$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow 96 = 96 \xrightarrow{\text{方法數}} 1 \\ k=2 \Rightarrow 96 = \begin{cases} 3 \times 2^5, 6 \times 2^4, 12 \times 2^3, \\ 24 \times 2^2, 48 \times 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{方法數}} (2!) \times 5 = 10 \\ k=3 \Rightarrow 96 = \begin{cases} 3 \times 2^4 \times 2, 3 \times 2^3 \times 2^2, \\ 6 \times 2^3 \times 2, 6 \times 2^2 \times 2^2, \\ 12 \times 2^2 \times 2, 24 \times 2 \times 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{方法數}} (3!) \times 4 + \left( \frac{3!}{2!} \right) \times 2 = 30 \\ k=4 \Rightarrow 96 = \begin{cases} 3 \times 2^3 \times 2 \times 2, 3 \times 2^2 \times 2^2 \times 2, \\ 6 \times 2^2 \times 2 \times 2, 12 \times 2 \times 2 \times 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{方法數}} \left( \frac{4!}{2!} \right) \times 3 + \left( \frac{4!}{3!} \right) \times 1 = 40 \\ k=5 \Rightarrow 96 = \begin{cases} 3 \times 2^2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{方法數}} \left( \frac{5!}{3!} \right) \times 1 + \left( \frac{5!}{4!} \right) \times 1 = 25 \\ k=6 \Rightarrow 96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \xrightarrow{\text{方法數}} \left( \frac{6!}{5!} \right) \times 1 = 6 \end{array} \right.$$

綜合上述，共有 112 種