

2020 第 71 屆 AMC 12B

俞克斌老師 編授

1. 試問下列式子化簡後之值為何？

$$\sqrt{1} + \sqrt{1+3} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7}$$

(A) 5 (B) $4 + \sqrt{7} + \sqrt{10}$ (C) 10 (D) 15 (E) $4 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(C)

解：所求 $= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

2. 試問下列式子的值是多少？

$$\frac{100^2 - 7^2}{70^2 - 11^2} \cdot \frac{(70-11)(70+11)}{(100-7)(100+7)}$$

(A) 1 (B) $\frac{9951}{9950}$ (C) $\frac{4780}{4779}$ (D) $\frac{108}{107}$ (E) $\frac{81}{80}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(A)

3. 設 w 對 x 的比是 $4:3$ ， y 對 z 的比是 $3:2$ ，且 z 對 x 的比是 $1:6$ 。試問 w 對 y 的比是下列何者？

(A) $4:3$ (B) $3:2$ (C) $8:3$ (D) $4:1$ (E) $16:3$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(E)

解：
$$\begin{cases} 4x = 3w \\ 3z = 2y \\ x = 6z \end{cases} \Rightarrow w : x : y : z = 16 : 12 : 3 : 2$$

4. 一個直角三角形的兩個銳角分別是 a° 與 b° ，其中 $a > b$ 且 a 與 b 都是質數。試問 b 可能的最小值為何？

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(D)

解： $a + b = 90$ 且 $a > b$ 且 a 與 b 都是質數

$$(a, b) = (83, 7), (79, 11), (73, 17), (71, 19), (61, 29), (59, 31), (53, 37), (47, 43)$$

5. 球隊 A 與球隊 B 參加一個籃球聯盟主辦的比賽，所有參賽隊伍的每一場比賽都有輸贏且沒有平手。球隊 A 贏了它所有出賽場次的 $\frac{2}{3}$ 而且球隊 B 贏了它所有出賽場次的 $\frac{5}{8}$ 。已知球隊 B 贏的場次比球隊 A 贏的場次多了 7 場，而且球隊 B 輸的場次也比球隊 A 輸的場次多了 7 場。試問球隊 A 總共比賽多少場？

(A) 21 (B) 27 (C) 42 (D) 48 (E) 63

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(C)

$$\boxed{\text{解}} : \begin{cases} \frac{5}{8}y - \frac{2}{3}x = 7 \\ \frac{3}{8}y - \frac{1}{3}x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 56 \end{cases}$$

6. 試問對所有整數 $n \geq 9$ ， $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!}$ 的值一定會滿足下列哪一個選項？

- (A) 4 的倍數 (B) 10 的倍數 (C) 質數 (D) 完全平方數 (E) 完全立方數

$\boxed{\text{答}} : (D)$

$$\boxed{\text{解}} : \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)![(n+2)-1]}{n!} = (n+1)[n+1] = (n+1)^2$$

7. 在 xy 坐標平面上的二條非水平也非鉛直的直線其夾角為 45° ，其中一條直線斜率等於另一條直線斜率的 6 倍。試問這二條直線斜率乘積可能的最大值是多少？

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3 (E) 6

【2020 第 71 屆 AMC12B】

$\boxed{\text{答}} : (C)$

$$\boxed{\text{解}} : \tan(45^\circ + \theta) = 6 \tan \theta \Rightarrow \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 6 \tan \theta \Rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{1}{2} \\ \tan(45^\circ + \theta) = 3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tan \theta = \frac{1}{3} \\ \tan(45^\circ + \theta) = 2 \end{cases}$$

這二條直線斜率乘積可能 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

8. 試問有多少個有序整數對 (x, y) 滿足方程式 $x^{2020} + y^2 = 2y$ ？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 無限多

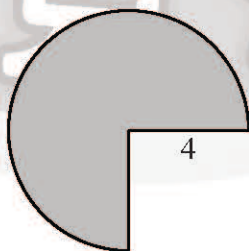
【2020 第 71 屆 AMC12B】

$\boxed{\text{答}} : (D)$

$$\boxed{\text{解}} : \text{原式} \Rightarrow x^{2020} + (y-1)^2 = 1 \xrightarrow{x, y \in \mathbb{Z}} (x, y) = (1, 1), (-1, 1), (0, 2), (0, 0)$$

9. 下圖所示的陰影部分，是一個半徑長 4 英寸之圓的四分之三部分所形成的扇形。將這個扇形圖形中所顯示的兩個半徑黏在一起，可形成一個直圓錐體的側面。試問這個直圓錐體的體積是多少立方英寸？

- (A) $3\sqrt{5}\pi$ (B) $4\sqrt{3}\pi$ (C) $3\sqrt{7}\pi$ (D) $6\sqrt{3}\pi$ (E) $6\sqrt{7}\pi$



【2020 第 71 屆 AMC12B】

$\boxed{\text{答}} : (C)$

解：直圓錐體的底圓周長 = 扇形弧長 = $4 \times \frac{3}{2}\pi = 6\pi$

直圓錐體的底圓半徑 = 3 \Rightarrow 直圓錐體的高 = $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

直圓錐體的體積 = $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}\pi$

10. 邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 其內切圓 ω 切 \overline{CD} 於點 M ，且 \overline{AM} 交 ω 於異於 M 的另一點 P 。試問 $\overline{AP} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{9}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{8}$ (E) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

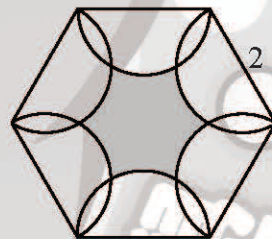
答：(B)

解：令 $\omega : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ， $A(0, 0)$ ， $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ， $\overleftrightarrow{AM} : x - 2y = 0$

\overleftrightarrow{AM} 與 ω 交於 $P\left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$ 、 $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ，故 $\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

11. 如下圖所示，六個半圓在一個邊長為 2 之正六邊形的內部而且每個半圓的直徑均與正六邊形的邊重合。試問圖中陰影區域(正六邊形的內部但在六個半圓的外部)的面積為何？

- (A) $6\sqrt{3} - 3\pi$ (B) $\frac{9\sqrt{3}}{2} - 2\pi$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$
(D) $3\sqrt{3} - \pi$ (E) $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$



【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(D)

解： $6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2\right) - 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2\right) = 3\sqrt{3} - \pi$

12. 設 \overline{AB} 是一個半徑長為 $5\sqrt{2}$ 之圓的直徑，若此圓上的一條弦 \overline{CD} 交 \overline{AB} 於 E ，使得 $\overline{BE} = 2\sqrt{5}$ 且 $\angle AEC = 45^\circ$ 。試問 $\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = ?$

- (A) 96 (B) 98 (C) $44\sqrt{5}$ (D) $70\sqrt{2}$ (E) 100

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(E)

解： $\frac{\overline{CE} - \overline{DE}}{2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} \Rightarrow \overline{CE} - \overline{DE} = (5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})\sqrt{2} = 10 - 2\sqrt{10}$

$\overline{CE} \times \overline{DE} = (2 \times 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \times 2\sqrt{5} = 40\sqrt{10} - 20$

$\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = [\overline{CE} - \overline{DE}]^2 + 2\overline{CE} \times \overline{DE} = [10 - 2\sqrt{10}]^2 + 2[40\sqrt{10} - 20] = 100$

13. 試問下列選項中的哪一個等於 $\sqrt{\log_2 6 + \log_3 6}$?

- (A) 1 (B) $\sqrt{\log_5 6}$ (C) 2
(D) $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$ (E) $\sqrt{\log_2 6} + \sqrt{\log_3 6}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(D)

$$\begin{aligned} \text{解：} \sqrt{\log_2 6 + \log_3 6} &= \sqrt{\frac{\log 6}{\log 2} + \frac{\log 6}{\log 3}} = \frac{\log 6}{\sqrt{\log 2 \log 3}} \\ \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} &= \frac{\sqrt{\log 3}}{\sqrt{\log 2}} + \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 3}} = \frac{\log 6}{\sqrt{\log 2 \log 3}} \end{aligned}$$

14. 貝拉與珍妮在實數線的閉區間 $[0, n]$ 中玩選取數字比賽遊戲，其中 n 為大於 4 的一個固定整數。方法如下：他們二人輪流玩，由貝拉開始。在第一輪，貝拉在區間 $[0, n]$ 中任意選取一個實數。自此之後，輪到比賽的人要選取一個實數，使得這個數必須與這兩位遊戲者選取過的所有的數之距離均超過一個單位以上。如果比賽者無法選到這樣的數就輸掉這場遊戲。試問若使用最佳策略，哪一位比賽者會贏得遊戲？

- (A) 貝拉總是會贏。
(B) 珍妮總是會贏。
(C) 貝拉會贏的充要條件為 n 是奇數。
(D) 珍妮會贏的充要條件為 n 是奇數。
(E) 珍妮會贏的充要條件為 $n > 8$ 。

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(A)

解：由於貝拉是先操作，故他只要選 $[0, n]$ 中點 $\frac{n}{2}$ 的實數
不論珍妮選擇任一側，貝拉都作對稱位置的操作
所以貝拉總是會贏

15. 有 10 個人等距圍繞在一個圓周上，每一個人恰認識其他 9 人中的 3 人，這 3 人就是與他相鄰的 2 人以及在圓上跟他正對面的人。試問有多少種不同方法可以將這 10 個人分成 5 對，使得每一對中的人彼此都認識？

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(C)

解：將所有位置編號為 $0 \sim 9$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (01)(23)(45)(67)(89) \\ (12)(34)(56)(78)(90) \\ [05][16][27][38][49] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [05](12)(34)(67)(89) \\ [16](23)(45)(78)(90) \\ [27](34)(56)(89)(01) \\ [38](45)(67)(90)(12) \\ [49](56)(78)(01)(23) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [05][16][27](34)(89) \\ [16][27][38](45)(90) \\ [27][38][49](56)(01) \\ [38][49][50](67)(12) \\ [49][50][61](78)(23) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

共 13 組

16. 一個甕中有一個紅色球與一個藍色球，旁邊準備了一個裝有足夠多個紅色球與藍色球的箱子。喬治執行如下的操作四次：每次他從甕中隨意取出一球，然後從箱子取出一個相同顏色的球，並將這兩個相同顏色的球一起放回甕中。經過四次重複操作後，甕中會有六個球。試問甕中恰有三個紅色球與三個藍色球的機率為何？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(B)

解： $\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{1}{5}$

17. 設 a, b, c, d 為實數，試問有多少個多項式方程式 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2020 = 0$ 會有如下性質：每當 r 是一個根，則 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot r$ 也會是一個根？(註： $i = \sqrt{-1}$ 。)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(C)

解：已知當 r 是根，則 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot r = r(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ 也會是根

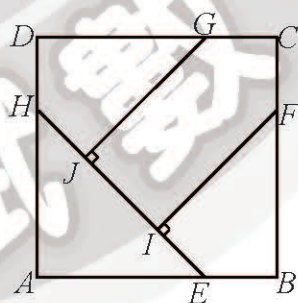
又原多項方程式為實係數，故 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \cdot r = r(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ 也會是根

故原式 $= (x-r)^m \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot r\right)^n \left(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \cdot r\right)^\ell$

但原式為五次實係數，故 $(m, n, \ell) = (3, 1, 1)$ 或 $(1, 2, 2)$ 兩種

18. 在正方形 $ABCD$ 中，點 E 與點 H 分別在 \overline{AB} 與 \overline{DA} 上使得 $\overline{AE} = \overline{AH}$ ，點 F 與點 G 分別在 \overline{BC} 與 \overline{CD} 上，以及點 I 與點 J 在 \overline{EH} 上使得 $\overline{FI} \perp \overline{EH}$ 且 $\overline{GJ} \perp \overline{EH}$ ，如下圖所示。若三角形 AEH 、四邊形 $BFIE$ 、四邊形 $DHJG$ 、以及五邊形 $FCGJI$ 等四個區域的面積都是 1。試問 $\overline{FI}^2 = ?$

(A) $\frac{7}{3}$ (B) $8-4\sqrt{2}$ (C) $1+\sqrt{2}$
(D) $\frac{7}{4}\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{2}$



【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(B)

解：正方形總面積為 4，故正方形邊長為 2

故 $\overline{AE} = \overline{AH} = \sqrt{2}$ ，且 $\overline{CM} = 2\sqrt{2} - 1$ (M 為 \overline{IJ} 中點)，

令 $\overline{CF} = \sqrt{2}x$ ，則 $\overline{IM} = x$ 、 $\overline{FI} = 2\sqrt{2} - 1 - x$

$$CFIM \text{ 面積} = \frac{(4\sqrt{2} - 2 - x)x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (2\sqrt{2} - 1) - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\overline{FI}^2 = (2\sqrt{2} - 1 - x)^2 = \left(2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

解：正方形總面積為 4，故正方形邊長為 2

故 $\overline{AE} = \overline{AH} = \sqrt{2}$ ，且 $\overline{BE} = \overline{PN} = 2 - \sqrt{2}$ （ N 為 \overrightarrow{CB} 、 \overrightarrow{HE} 交點），

$$\text{則 } \left(\frac{\overline{FI}}{\overline{BE}}\right)^2 = \frac{1 + \Delta BEN}{\Delta BEN} \Rightarrow \overline{FI}^2 = 2 + \overline{BE}^2 = 8 - 4\sqrt{2}$$

19. 正方形 $ABCD$ 在坐標平面上，

其四個頂點的坐標分別是 $A(1,1)$ 、 $B(-1,1)$ 、 $C(-1,-1)$ 、 $D(1,-1)$ 。

考慮下面四種轉換：

- L 表繞著原點逆時針方向旋轉 90°
- R 表繞著原點順時針方向旋轉 90°
- H 表對 x 軸鏡射
- V 表對 y 軸鏡射

這四種轉換中每一種都會把這正方形映成至本身，

例如，先利用 R 然後再用 V 會把 $A(1,1)$ 送到 $(-1,-1)$ 且把 $B(-1,1)$ 送到原來位置。

從 $\{L, R, H, V\}$ 中，適當選取 20 個轉換組成的序列，可以把所有這四個頂點分別送回原來的位置。試問這樣的序列共有多少個？（例如， R, R, V, H 是一組四個轉換組成的序列，此序列轉換會把這四個頂點分別送回原來的位置。）

- (A) 2^{37} (B) $3 \cdot 2^{36}$ (C) 2^{38} (D) $3 \cdot 2^{37}$ (E) 2^{39}

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(C)

$$\text{解：} 4^{20} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4^{19}$$

20. 有兩個大小相同的正立方體，在每一個正立方體相異的六個面上隨機的塗上黑色或白色，試問經過塗色後，這兩個立方體可以經由轉動變成外觀完全一致的機率為何？

- (A) $\frac{9}{64}$ (B) $\frac{289}{2048}$ (C) $\frac{73}{512}$ (D) $\frac{147}{1024}$ (E) $\frac{589}{4096}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(D)

$$\underbrace{1^2}_{0 \text{ 黑 } 6 \text{ 白}} + \underbrace{6^2}_{1 \text{ 黑 } 5 \text{ 白}} + \underbrace{12^2}_{\text{黑相鄰}} + \underbrace{3^2}_{\text{黑相對}} + \underbrace{12^2}_{\text{三團聚}} + \underbrace{8^2}_{\text{三連長}} + \underbrace{12^2}_{\text{白相鄰}} + \underbrace{3^2}_{\text{白相對}} + \underbrace{6^2}_{5 \text{ 黑 } 1 \text{ 白}} + \underbrace{1^2}_{6 \text{ 黑 } 0 \text{ 白}}$$

$$\text{解：} \frac{\underbrace{2 \text{ 黑 } 4 \text{ 白}} + \underbrace{3 \text{ 黑 } 3 \text{ 白}} + \underbrace{4 \text{ 黑 } 2 \text{ 白}}}{\left(2^6\right)^2} = \frac{147}{1024}$$

21. 試問有多少個正整數 n 滿足 $\frac{n+1000}{70} = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$? (註: $\left\lfloor x \right\rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數。)
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 30 (E) 32

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答: (C)

解: $\frac{n+1000}{70} = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 70t + 50 \Rightarrow t + 15 = \left\lfloor \sqrt{70t + 50} \right\rfloor$, 其中 $t \in \mathbb{Z}$

但 $\sqrt{70t + 50} - 1 < t + 15 = \left\lfloor \sqrt{70t + 50} \right\rfloor \leq \sqrt{70t + 50}$, 故 $t + 15 \leq \sqrt{70t + 50} < t + 16$

則 $5 \leq t \leq 35$ 且 ($t > 19 + \sqrt{149} \approx 31. \dots$ 或 $t < 19 - \sqrt{149} \approx 6. \dots$), 其中 $t \in \mathbb{Z}$
知 $t = 5, 6, 32, 33, 34, 35$

解: $\sqrt{n} - 1 < \frac{n+1000}{70} = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \leq \sqrt{n} \Rightarrow \begin{cases} n - 70\sqrt{n} + 1070 > 0 \\ n - 70\sqrt{n} + 1000 \leq 0 \\ \frac{n+1000}{70} = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 70t + 50 \end{cases}$,

$\Rightarrow 20 \leq \sqrt{n} < 35 - \sqrt{155}$ 或 $35 + \sqrt{155} < \sqrt{n} \leq 50$

$\Rightarrow 400 \leq n < \underbrace{1380 - 70\sqrt{155}}_{508.5\dots}$ 或 $\underbrace{1380 + 70\sqrt{155}}_{2251.4\dots} < n \leq 2500$

$n = 400, 470, 2290, 2360, 2430, 2500$

22. 設 t 為實數, 則 $\frac{(2^t - 3t)t}{4^t}$ 的最大值為何?

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{1}{9}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答: (C)

解: $\frac{(2^t - 3t)t}{4^t} = -3 \left(\frac{t}{2^t} \right)^2 + \left(\frac{t}{2^t} \right) = -3 \left[\frac{t}{2^t} - \frac{1}{6} \right]^2 + \frac{1}{12}$

存在 $\frac{t}{2^t} = \frac{1}{6}$, 使 $\frac{(2^t - 3t)t}{4^t}$ 有最大值 $\frac{1}{12}$

23. 設整數 $n \geq 2$ 使得每當任意 n 個複數 z_1, z_2, \dots, z_n 滿足 $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ 與 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ 時, 則這 n 個複數必然會等距分布在複數平面的單位圓上, 試問這樣的 n 有多少個?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答: (B)

解: 不失其一般性, 不妨令 $z_1 = 1$

$n=2$ ，滿足 $|z_i|=1$ ，且 $\sum_{i=1}^2 z_i=0$ ，則 $z_2=-1$ 。 $\langle z_i \rangle$ 確實等距分佈

$n=3$ ，滿足 $|z_i|=1$ ，且 $\sum_{i=1}^3 z_i=0$ ，則 $z_2+z_3=-1$ ，

亦即 $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 、 $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。 $\langle z_i \rangle$ 確實等距分佈

$n \geq 4$ ，滿足 $|z_i|=1$ ，且 $\sum_{i=1}^n z_i=0$ ，無法保證 $\langle z_i \rangle$ 等距分佈

例如： $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 、 $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 、 $z_4=-1$ 。

24. 將正整數 n 寫成乘積 $n = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_k$ ，其中 $k \geq 1$ ， f_i 都是大於 1 的整數，且列式中的因數是有考慮次序的(即任意兩個因數次序不同的表示法是被視為相異的)。我們以 $D(n)$ 表示在上述規定下，將 n 寫成各種乘積的所有方法數。例如，數字 6 可以寫成 6、 $2 \cdot 3$ 與 $3 \cdot 2$ ，所以 $D(6)=3$ 。試問 $D(96)$ 為何？
(A) 112 (B) 128 (C) 144 (D) 172 (E) 184

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(A)

解： $96 = 2^5 \times 3^1$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow 96 = 96 \xrightarrow{\text{方法數}} 1 \\ k=2 \Rightarrow 96 = \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 2^5, 6 \times 2^4, 12 \times 2^3, \\ 24 \times 2^2, 48 \times 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{方法數}} (2!) \times 5 = 10 \\ k=3 \Rightarrow 96 = \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 2^4 \times 2, 3 \times 2^3 \times 2^2, \\ 6 \times 2^3 \times 2, 6 \times 2^2 \times 2^2, \\ 12 \times 2^2 \times 2, 24 \times 2 \times 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{方法數}} (3!) \times 4 + \left(\frac{3!}{2!} \right) \times 2 = 30 \\ k=4 \Rightarrow 96 = \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 2^3 \times 2 \times 2, 3 \times 2^2 \times 2^2 \times 2, \\ 6 \times 2^2 \times 2 \times 2, 12 \times 2 \times 2 \times 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{方法數}} \left(\frac{4!}{2!} \right) \times 3 + \left(\frac{4!}{3!} \right) \times 1 = 40 \\ k=5 \Rightarrow 96 = \left\{ \begin{array}{l} 3 \times 2^2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ 6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{方法數}} \left(\frac{5!}{3!} \right) \times 1 + \left(\frac{5!}{4!} \right) \times 1 = 25 \\ k=6 \Rightarrow 96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \xrightarrow{\text{方法數}} \left(\frac{6!}{5!} \right) \times 1 = 6 \end{array} \right.$$

綜合上述，共有 112 種

25. 對每一個實數 a ，其中 $0 \leq a \leq 1$ ，設 x 與 y 為分別從區間 $[0, a]$ 與 $[0, 1]$ 獨立隨機選取的數，並且設 $P(a)$ 為滿足 $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) > 1$ 的機率。試問 $P(a)$ 的最大值為何？

- (A) $\frac{7}{12}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (E) $\frac{5}{8}$

【2020 第 71 屆 AMC12B】

答：(B)

解： $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) > 1 \Rightarrow \sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) > 0$

$$\Rightarrow [\sin \pi x - \cos \pi y][\sin \pi x + \cos \pi y] > 0, \text{ 故 } (x, y) \in \begin{cases} -\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P(a) = \frac{\frac{1}{2} - (1-a)^2}{1 \times a} = 2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right) \xrightarrow{\text{算幾不等式}} \leq 2 - 2\sqrt{a \times \frac{1}{2a}} = 2 - \sqrt{2}$$

俞克斌數