

109 學年度學科能力測驗數學考科試題詳解

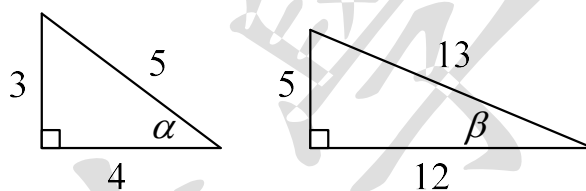
一、單選題

1. 已知兩個直角三角形三邊長分別為3,4,5、5,12,13， α, β 分別為它們的一角，如下圖所示。

試選出正確的選項。

(1) $\sin \alpha > \sin \beta > \sin 30^\circ$ (2) $\sin \alpha > \sin 30^\circ > \sin \beta$ (3) $\sin \beta > \sin \alpha > \sin 30^\circ$

(4) $\sin \beta > \sin 30^\circ > \sin \alpha$ (5) $\sin 30^\circ > \sin \alpha > \sin \beta$



【109學測】

答案：(2)

解析： $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.6$, $\sin \beta = \frac{5}{13} = 0.384\dots$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \sin \alpha > \sin 30^\circ > \sin \beta$

2. 空間中有相異四點 A, B, C, D ，已知內積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 。試選出正確的選項。

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ (2) $\vec{AC} = \vec{AD}$ (3) \vec{AB} 與 \vec{CD} 平行

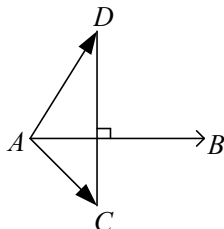
(4) $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ (5) A, B, C, D 四點在同一平面上

【109 學測】

答案：(1)

解析：(1) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

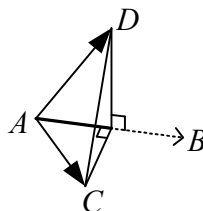
(2) 不一定



(3) \vec{AB} 與 \vec{CD} 為垂直

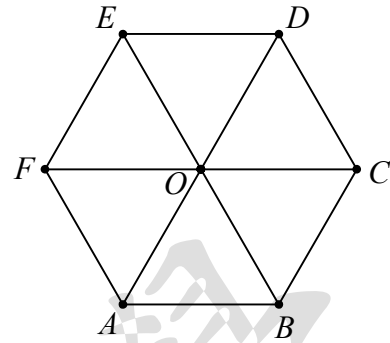
(4) \vec{AD} 與 \vec{BC} 沒有垂直 $\Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BC} \neq 0$

(5) 可能為立體的圖形 $\Rightarrow A, B, C, D$ 不在同一平面



3. 如圖所示， O 為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點 P 落在 $\triangle ODE$ 內部(不含邊界)?

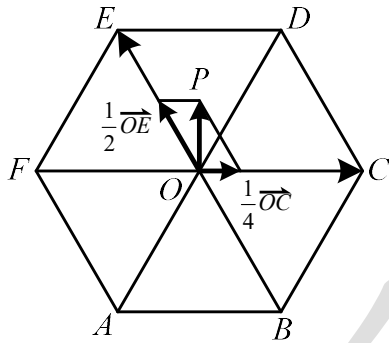
- (1) $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{OE}$ (2) $\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OE}$
 (3) $\vec{OP} = -\frac{1}{4}\vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OE}$ (4) $\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OE}$
 (5) $\vec{OP} = -\frac{1}{4}\vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OE}$



【109學測】

答案：(2)

解析：(2)



4. 令 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = I + A + A^{-1}$ ，試選出代表 BA 的選項。

- (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

【109學測】

答案：(5)

解析： $A^{-1} = \frac{1}{4-3} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = I + A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 6I$$

$$BA = 6I \cdot A = 6A = 6 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

5. 試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？

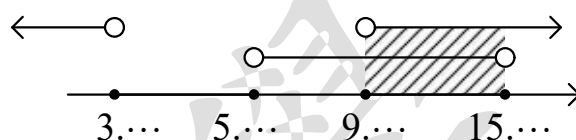
- (1) 1 個 (2) 4 個 (3) 6 個 (4) 8 個 (5) 10 個

【109學測】

答案：(3)

解析：估計 $\sqrt{101} = 10.1$ 、 $\sqrt{38} = 6.2$

設 P 點為 $x \Rightarrow |x - \sqrt{101}| < 5$ ， $|x - \sqrt{38}| > 3$



$$\Rightarrow \begin{cases} |x - \sqrt{101}| < 5 \Rightarrow -5 + \sqrt{101} < x < 5 + \sqrt{101} \Rightarrow 5.1 \dots < x < 15.1 \dots & \rightarrow \textcircled{1} \\ |x - \sqrt{38}| > 3 \Rightarrow x < -3 + \sqrt{38} \text{ or } x > 3 + \sqrt{38} \Rightarrow x < 3.1 \dots \text{ or } x > 9.1 \dots & \rightarrow \textcircled{2} \end{cases}$$

由 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2} \Rightarrow 9.1 \dots < x < 15.1 \dots \Rightarrow$ 整數點為 10, 11, 12, 13, 14, 15 共有 6 個

6. 連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為 a, b 。試問發生 $\log(a^2) + \log b > 1$ 的機率為多

- 少？(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{5}{6}$

【109學測】

答案：(4)

解析： $\log(a^2) + \log b > 1 \Rightarrow \log(a^2 b) > 1 \Rightarrow a^2 b > 10$

$$\therefore \text{機率為} = \frac{4+5+6+6+6}{6 \times 6} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$\begin{matrix} a^2 \\ b \end{matrix}$	1	4	9	16	25	36
1	×	×	×	16	25	36
2	×	×	18	32	50	72
3	×	12	27	48	75	108
4	×	16	36	64	100	144
5	×	20	45	80	125	180
6	×	24	54	96	150	216

7. 坐標平面上，函數圖形 $y = -\sqrt{3}x^3$ 上有兩個點 P, Q 到原點距離皆為 1。已知點 P 坐標為 $(\cos \theta, \sin \theta)$ ，試問點 Q 坐標為何？

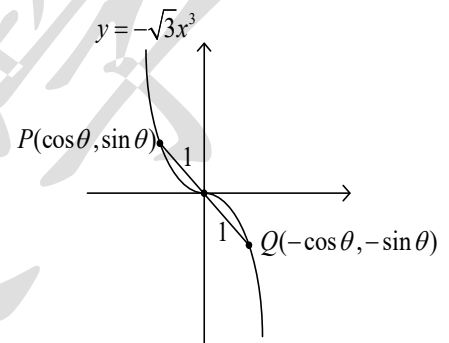
- (1) $(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ (2) $(-\cos \theta, \sin \theta)$ (3) $(\cos(-\theta), -\sin \theta)$
 (4) $(-\cos \theta, \sin(-\theta))$ (5) $(\cos \theta, -\sin \theta)$

【109學測】

答案：(4)

解析： $\because P, Q$ 到原點距離皆為 1 $\Rightarrow P, Q$ 為圖形上以原點為對稱中心

$$\Rightarrow Q(-\cos \theta, -\sin \theta) = (-\cos \theta, \sin(-\theta))$$



二、多選題

8. 有一個遊戲的規則如下：丟三顆公正骰子，若所得的點數恰滿足下列 (A) 或 (B) 兩個條件之一，可得到獎金 100 元；若兩個條件都滿足，則共得 200 元獎金；若兩個條件都不滿足，則無獎金。

- (A) 三個點數皆為奇數或者皆為偶數
 (B) 三個點數由小排到大為等差數列

若已知有兩顆骰子的點數分別為 1, 3，且所得獎金為 100 元，則未知的骰子點數可能為何？

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

【109學測】

答案：(1)(2)

解析：(1) 點數為 1, 2, 3 成等差，滿足 (B) 得 100 元

(2) 點數為 1, 3, 3 皆為奇數，滿足 (A) 得 100 元

(3) 點數為 1, 3, 4 皆不符合，得 0 元

(4) 點數為 1, 3, 5 同時皆是奇數也是成等差，滿足 (A)(B) 得 200 元

(5) 點數為 1, 3, 6 皆不符合，得 0 元

9. 在坐標平面上，有一通過原點 O 的直線 L ，以及一半徑為 2，圓心為原點 O 的圓 Γ 。 P, Q 為 Γ 上相異 2 點，且 $\overline{OP}, \overline{OQ}$ 分別與 L 所夾的銳角皆為 30° ，試選出內積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 之值可能發生的選項。

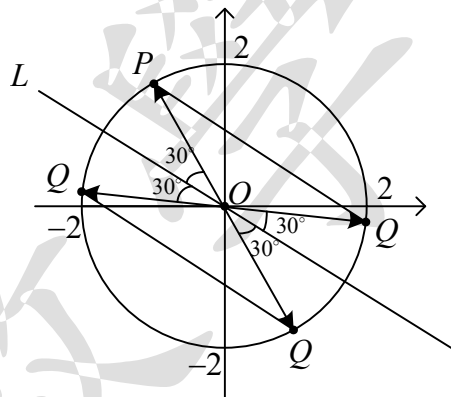
- (1) $2\sqrt{3}$ (2) $-2\sqrt{3}$ (3) 0 (4) -2 (5) -4

【109學測】

答案：(4)(5)

解析：如圖， $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 的夾角可能為 $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = -2 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2 \times 2 \times \cos 180^\circ = -4 \end{cases}$$



10. 考慮多項式 $f(x) = 3x^4 + 11x^2 - 4$ ，試選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 的圖形和 y 軸交點的 y 坐標小於 0
 (2) $f(x) = 0$ 有 4 個實根
 (3) $f(x) = 0$ 至少有一個有理根
 (4) $f(x) = 0$ 有一根介於 0 與 1 之間
 (5) $f(x) = 0$ 有一根介於 1 與 2 之間

【109學測】

答案：(1)(4)

解析： $f(x) = 3x^4 + 11x^2 - 4 = (3x^2 - 1)(x^2 + 4) = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x^2 + 4)$

所以 $f(x) = 0$ 的根為 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm 2i$

(1) $f(0) = -4$ 與 y 軸的交點為 $(0, -4)$

(2) $f(x)$ 為 2 實根 2 虛根

(3) $f(x)$ 為 2 實根且兩實根均為無理根 $\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4)(5) 有一實根 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1.732}{3} = 0.577$ 介於 0 與 1 之間

11. 設 a, b, c 為實數且滿足 $\log a = 1.1$ 、 $\log b = 2.2$ 、 $\log c = 3.3$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a + c = 2b$ (2) $1 < a < 10$ (3) $1000 < c < 2000$
 (4) $b = 2a$ (5) a, b, c 成等比數列

【109學測】

答案：(3)(5)

解析： $\log a = 1.1 \Rightarrow a = 10^{1.1}$ ， $\log b = 2.2 \Rightarrow b = 10^{2.2}$ ， $\log c = 3.3 \Rightarrow c = 10^{3.3}$

(1) $a + c = 10^{1.1} + 10^{3.3} \neq 2b = 2 \times 10^{2.2}$

(2) $a = 10^{1.1} > 10^1 \Rightarrow a > 10$

(3) $\log c = 3.3 = 3 + 0.3 = \log 10^3 + \log(1 \cdots) = \log(1 \cdots) \times 10^3 = \log(1 \times \times \times \cdots) \Rightarrow c = 1 \times \times \times \cdots$

(4) $b = 10^{2.2} \neq 2a = 2 \times 10^{1.1}$

(5) a, b, c 為 $10^{1.1}, 10^{2.2}, 10^{3.3} \Rightarrow$ 公比為 $10^{1.1}$

12. 下表是 2011 年至 2018 年某國總就業人口與農業就業人口的部分相關數據，各年度的人口以人數計，有些是以千人計，有些是以萬人計，例如 2011 年總就業人口為 1,070.9 萬人，65 歲以上男性農業就業人口為 69.1 千人。試根據表格資料選出正確的選項。

年別	就業人口			男性農業就業人口按年齡別分			
	總就業人口 (萬人)	農業就業 人口 (萬人)	男性農業 就業人口 (千人)	39 歲以下 (千人)	40-49 歲 (千人)	50-64 歲 (千人)	65 歲以上 (千人)
2011 年	1,070.9	54.2	386.3	67.6	85.4	164.2	69.1
2012 年	1,086.0	54.4	394.9	67.5	87.0	169.5	70.9
2013 年	1,096.7	54.4	391.5	66.6	83.9	171.3	69.7
2014 年	1,107.9	54.8	391.2	65.8	79.8	173.0	72.6
2015 年	1,119.8	55.5	403.1	71.7	76.9	181.3	73.2
2016 年	1,126.7	55.7	404.5	77.4	77.4	176.4	73.3
2017 年	1,135.2	55.7	405.1	73.9	78.1	178.3	74.8
2018 年	1,143.4	56.1	415.1	72.0	78.8	184.9	79.4

- (1) 從 2013 年至 2018 年，65 歲以上的男性農業就業人口逐年遞增
- (2) 從 2013 年至 2018 年，50 歲至 64 歲之男性農業就業人口逐年遞增
- (3) 上表中，每一年的男性農業就業人口占總就業人口的比率都小於百分之五
- (4) 上表中，每一年 50 歲至 64 歲之男性農業就業人口都少於 49 歲以下之男性農業就業人口
- (5) 就 65 歲以上之男性農業就業人口而言，2018 年比 2011 年增加了不到一萬人

【109學測】

答案：(1)(3)

解析：(1) 表格資料逐年增加

(2) 2015 年到 2016 年是下降的

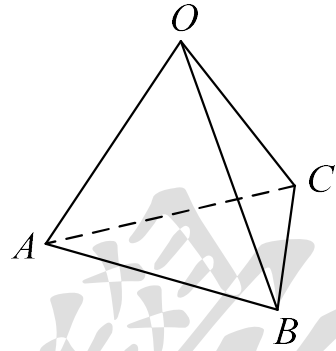
(3) 總就業人口(萬人)×百分之五皆比男性農業就業人口數(千人)大

(4) 49 歲以下之男性農業就業人口相加皆小於 50 歲至 64 歲之男性農業就業人口

(5) 2011 年為 69.1(千人)，2018 年為 79.4(千人) ⇒ 增加了 10.3(千人) = 1.03(萬人)

13. 如示意圖，四面體 $OABC$ 中， $\triangle OAB$ 和 $\triangle OAC$ 均為正三角形， $\angle BOC = 30^\circ$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\overline{BC} > \overline{OC}$
 (2) $\triangle OBC$ 是等腰三角形
 (3) $\triangle OBC$ 的面積大於 $\triangle OAB$ 的面積
 (4) $\angle CAB = 30^\circ$
 (5) 平面 OAB 和平面 OAC 的夾角(以銳角計)小於 30°



【109學測】

答案：(2)(4)

解析：設 $\triangle OAB$ 的邊長為 2

$$(1) \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 30^\circ = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} = 1.035 < \overline{OC}$$

$$(2) \triangle OBC \text{ 三邊長為 } 2, 2, \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ 為等腰三角形}$$

$$(3) \triangle OBC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 1, \triangle OAB \text{ 的面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \triangle OAB$ 的面積大於 $\triangle OBC$ 的面積

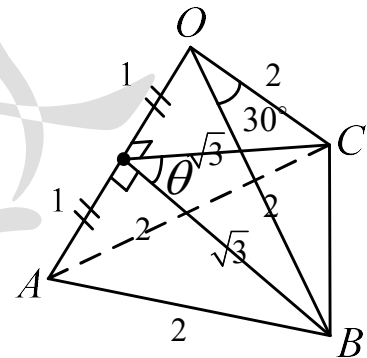
$$(4) \triangle OBC \cong \triangle ABC \text{ (SAS全等)} \Rightarrow \angle COB = \angle CAB = 30^\circ$$

(5) 平面 OAB 和平面 OAC 的夾角

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3 + 3 - (8 - 4\sqrt{3})}{6} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{3} \approx 0.821 \dots$$

$$\text{又 } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \dots$$

$\because \cos$ 角度越大其值越小， $\therefore \cos \theta = 0.821 \dots < \cos 30^\circ = 0.866 \dots \Rightarrow \theta > 30^\circ$



三、選填題

A. 網路賣家以 200 元的成本取得某件模型，並以成本的 5 倍作為售價，差價即為利潤。但過了一段時間無人問津，因此賣家決定以逐次減少一半利潤的方式調降售價。若依此方式進行，則調降三次後該模型的售價為_____元

【109學測】

答案：300

解析：原：售價=1000 \Rightarrow 利潤=800

調降第一次：利潤=400 \Rightarrow 售價=600

調降第二次：利潤=200 \Rightarrow 售價=400

調降第三次：利潤=100 \Rightarrow 售價=300

B. 有一按鈕遊戲機，每投幣一枚，可按遊戲機三次。第一次按下會出現黑色或白色的機率各為 $\frac{1}{2}$ ；第二或第三次按下，出現與前一次同色機率為 $\frac{1}{3}$ ，不同色的機率為 $\frac{2}{3}$ 。今某甲投幣一枚後，按三次均出現同色的機率為_____。(化為最簡分數)

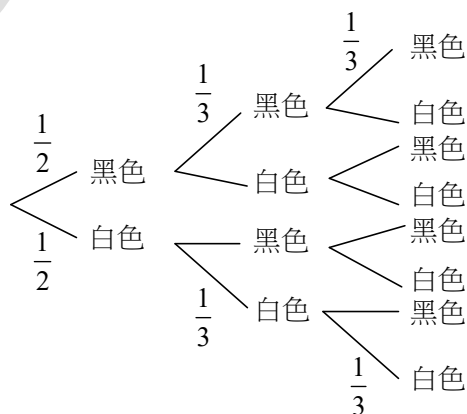
【109學測】

答案： $\frac{1}{9}$

解析：第一次黑色且三次同色機率 $=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

第一次白色且三次同色機率 $=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

\therefore 三次均出現同色的機率為 $=\frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$



C. 設 S 為坐標平面上直線 $2x+y=10$ 被平行線 $x-2y+15=0$ 與 $x-2y=0$ 所截的線段(含端點)。若直線 $3x-y=c$ 與 S 有交點，則 c 的最小值為_____

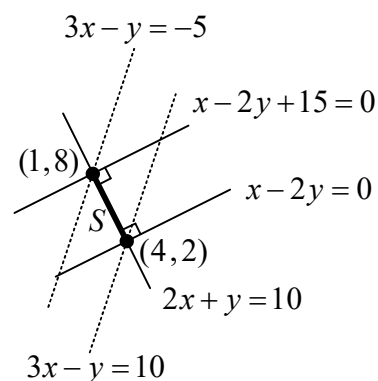
【108學測】

答案：-5

解析： $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y+15=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,8)$ ， $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(4,2)$

目標函數： $3x-y$ ，領導係數為正，越左邊答案越小

\Rightarrow 將 $(x,y)=(1,8)$ 代入 $3x-y \Rightarrow 3-8=-5=c$



D. 平面上有一等形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD} = 2$ ， $\angle BAD = 135^\circ$ 。則 $\overline{AC} =$ _____

【109學測】

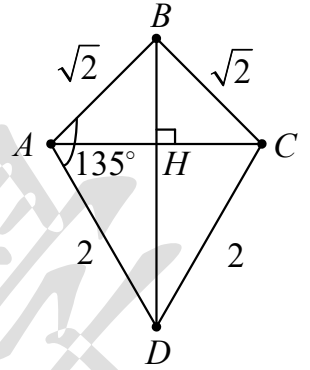
答案： $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

解析： $\overline{BD}^2 = (\sqrt{2})^2 + (2)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \times \cos 135^\circ = 10 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{10}$

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2 \times \overline{AH} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$



E. 空間中有三點 $A(1,7,2)$ 、 $B(2,-6,3)$ 、 $C(0,-4,1)$ 。若直線 L 通過 A 點並與直線 BC 相交且垂直，則 L 和直線 BC 的交點坐標為 _____

【109 學測】

答案： $(-3,-1,-2)$

解析： $\overrightarrow{BC} = (-2, 2, -2)$ ，假設參數式在直線 BC 上的交點 $P(2-2t, -6+2t, 3-2t)$

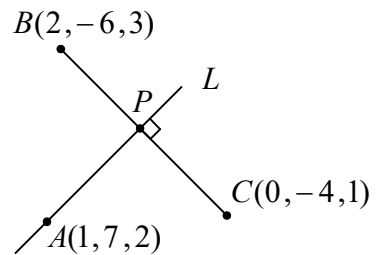
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = (-2t+1, 2t-13, -2t+1)$$

$\because L$ 和直線 BC 垂直

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (-2t+1) \times (-2) + (2t-13) \times (2) + (-2t+1) \times (-2) = 0$$

$$\Rightarrow 4t - 2 + 4t - 26 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow 12t = 30 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \text{交點 } P(2-2t, -6+2t, 3-2t) = (-3, -1, -2)$$



F. 坐標平面上有一條拋物線 Γ ，其上有四個點構成等腰梯形，且等腰梯形的對稱軸與 Γ 的對稱軸重合。已知該等腰梯形的上底為4、下底為6、高為14，則 Γ 的焦距為_____。(化為最簡分數)

【109學測】

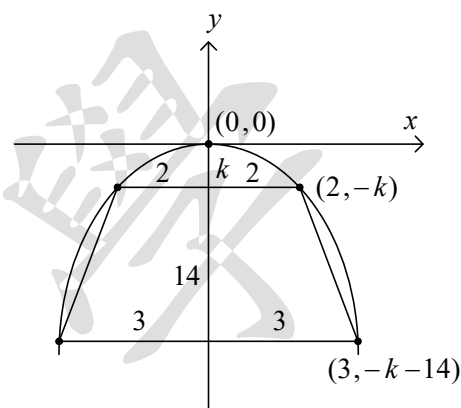
答案： $\frac{5}{56}$

解析：設 $\Gamma : x^2 = 4cy$

過 $(2, -k)$ 、 $(3, -k-14)$ 代入 $x^2 = 4cy$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 4c(-k) \\ 9 = 4c(-k-14) \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{-k}{-k-14} \Rightarrow -4k-56 = -9k \Rightarrow k = \frac{56}{5}$$

$$\because 4 = 4c(-k) \Rightarrow c = -\frac{1}{k} = -\frac{5}{56}, \therefore \text{焦距} = |c| = \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{5}{56}$$



G. 設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計

計圖如右圖所示：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、 \overline{QT} 為

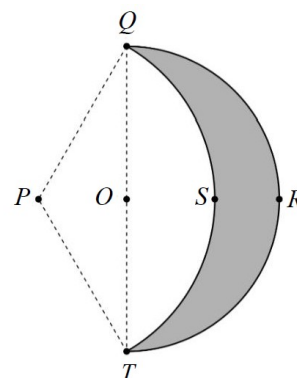
直徑的半圓， $\overline{QT} = 2\sqrt{3}$ 。圓弧 QST 的圓心在 P 點， $\overline{PQ} = \overline{PT} = 2$ 。

圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的灰色區域 $QRTSQ$ 即為某一天所

見的月亮形狀。設此灰色區域的面積為 $a\pi + \sqrt{b}$ ，其中 π 為圓周

率， a 為有理數， b 為整數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ (化為最簡分數)，

$b = \underline{\hspace{2cm}}$



【109學測】

答案： $\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$

解析：半圓 QTR 面積 $= \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\pi$ ，扇形 QPT 面積 $= \pi \times (2)^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{4}{3}\pi$

$$\triangle QPT \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = \sqrt{3}$$

所以灰色區域的面積 $=$ 半圓 QTR 面積 $-$ (扇形 QPT 面積 $- \triangle QPT$ 面積)

$$= \frac{3}{2}\pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right) = \frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$$

