HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十七卷 第十期 目錄（2014年10月）

如何計算紅球先取完的機率？

陳敏晧
國立蘭陽女中

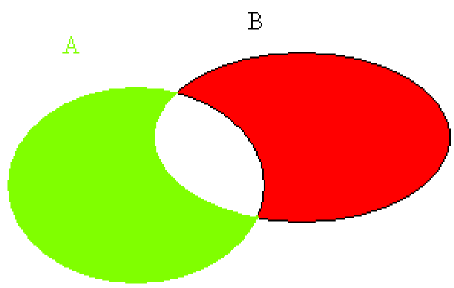
排列組合教學過程中，有一個值得討論的議題：「如何計算紅球先取完的機率？」先從兩種不同顏色球的討論開始：

例 1：袋中有三個紅球與兩個白球，今從袋中每次取一球，取後不放回，請問紅球比白球先取完的機率？
解法：因為紅球先取完，所以，最後一球必定是白球，因此，

$$P(\text{紅球比白球先取完})=\frac{\frac{4!}{2!\times 2!}}{\frac{5!}{3!\times 2!}}=\frac{3}{5}=\frac{3}{3+2}=\frac{R}{R+W}$$

，其中 R 代表紅球的個數，W 代表白球的個數。

接著，透過排容原理(**Inclusion–exclusion principle**)或取捨原理，如下圖一與圖二所示，可以將問題延伸。

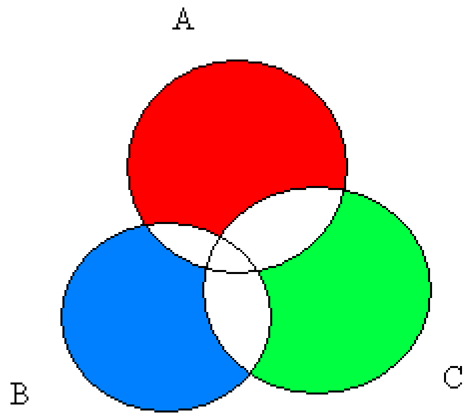


圖一代表兩個集合的排容原理，即 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

例 2：袋中有 R 個紅球與 W 個白球與 B 個黑球，今從袋中每次取一球，取後不放回，請問紅球比白球或黑球先取完的機率？

解法：

$$\begin{aligned} P(\text{紅球比白球或黑球先取完}) &= P(\text{紅球比白球先取完}) + P(\text{紅球比黑球先取完}) \\ &\quad - P(\text{紅球比白球且黑球先取完}) \\ &= \frac{W}{R+W} + \frac{B}{R+B} - \frac{W+B}{R+W+B} \text{。} \end{aligned}$$



圖二代表三個集合的排容原理，即

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

再把問題擴充，討論袋中有四種顏色的球，利用三個集合的排容原理。

例 3：袋中有 R 個紅球與 W 個白球與 B 個黑球與 Y 個黃球，今從袋中每次取一球，取後不放回，請問紅球比白球或黑球或黃球先取完的機率？

解法：

$$\begin{aligned} &P(\text{紅球比白球或黑球或黃球先取完}) = P(\text{紅球比白球先取完}) + P(\text{紅球比黑球先取完}) \\ &+ P(\text{紅球比黃球先取完}) - P(\text{紅球比白球且黑球先取完}) \\ &- P(\text{紅球比黑球且黃球先取完}) - P(\text{紅球比黃球且白球先取完}) \\ &+ P(\text{紅球比白球且黑球且黃球先取完}) \\ &= \frac{W}{R+W} + \frac{B}{R+B} + \frac{Y}{R+Y} - \frac{W+B}{R+W+B} - \frac{B+Y}{R+B+Y} - \frac{Y+W}{R+Y+W} + \frac{W+B+Y}{R+W+B+Y} \text{。} \end{aligned}$$

為了尋找規律，我們將例 1、例 2、例 3 的解答重新謄寫。

$$P(\text{紅球比白球先取完}) = \frac{R}{R+W} = \frac{R+W}{R+W} - \frac{W}{R+W} = 1 - \frac{R}{R+W} \text{。}$$

$$P(\text{紅球比白球或黑球先取完})=\frac{W}{R+W}+\frac{B}{R+B}-\frac{W+B}{R+W+B}=\frac{R+W}{R+W}-\frac{R}{R+W}$$
$$+\frac{R+B}{R+B}-\frac{R}{R+B}-\frac{R+W+B}{R+W+B}+\frac{R}{R+W+B}\text{。}$$
$$=1-\frac{R}{R+W}-\frac{R}{R+B}+\frac{R}{R+W+B}$$

$$P(\text{紅球比白球或黑球或黃球先取完})$$
$$=\frac{W}{R+W}+\frac{B}{R+B}+\frac{Y}{R+Y}-\frac{W+B}{R+W+B}-\frac{B+Y}{R+B+Y}-\frac{Y+W}{R+Y+W}+\frac{W+B+Y}{R+W+B+Y}$$
$$=1-\frac{R}{R+W}-\frac{R}{R+B}-\frac{R}{R+Y}+\frac{R}{R+W+B}+\frac{R}{R+B+Y}+\frac{R}{R+Y+W}-\frac{R}{R+W+B+Y}\text{。}$$

因此，若袋中有 R 個紅球與 K_i 顏色球有 A_i 個，其中 $i=1,2,3,...,n$，今從袋中每次取一球，取後不放回，請問紅球比 K_1 色球或 K_2 色球…或 K_n 色球先取完的機率為何？

解法：$P(\text{紅球比}K_1\text{色球或}K_2\text{色球...或}K_n\text{色球先取完})=1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left(\sum_{|S|=i}\frac{R}{R+\sum_{k\in S}A_k}\right)$，其中大括號內的 Σ 總和要取遍 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中所有的 n 元子集 S。這個公式雖然簡潔，但是不易導出。讀者可以自行揣摩。

歷史敘事與數學問題情境

吳允中
台灣師範大學數學系三年級

一、前言

請先閱讀下列有關春秋時代管仲（字夷吾）的一段歷史敘事：

昔者鮑叔薦夷吾為齊相任，桓公欲測其賢佞，適有一直田待耕。次日召寵臣易牙、刁豎、開方同往勘田，桓公諭曰：

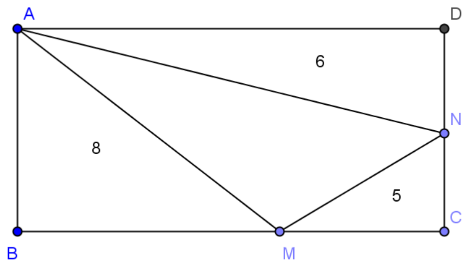
寡人之立為基點，今於廣邊立一旗，於縱邊立一旗，此三處以柵圍之，　（田於是四分），三卿各領其一隅，管子據其央，撥予穀種，待秋熟進納。

是歲徂秋，管子遣從者暗探三人穀穫，臨基點之兩田各八斛、六斛，另者五斛，三卿私議增報九斗於桓公，管子輾轉悉之。月餘，桓公召四人於殿前，問農成幾何。易牙曰八斛九斗，刁豎曰六斛九斗，開方曰五斛九斗。管子略思而進前叩首：「臣不肖，今奉一十三斛，應再納二斛方為王意。」桓公拊掌稱大善，遂用而為相。

接著，請參考下列解題，以確認你的解讀無誤。事實上，國文、歷史乃至數學科的老師之解讀重點，恐怕都不一樣。因此，數學閱讀能力顯然不同於中文的閱讀能力才是。

二、命題及其解法

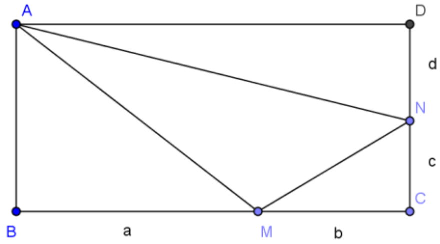
如圖一。矩形 **ABCD**，$\overline{\mathbf{BC}}$上有一點M，$\overline{\mathbf{CD}}$上有一點N，且知$\triangle$**ABM = 8**，$\triangle$**AND = 6**，$\triangle$**CMN = 5**。試求$\triangle$**AMN**。



圖一

直覺告訴我們：求解時必須設立未知數。然而，未知數該設在哪？需要多少個？皆是一門深奧的學問，若我們找對了關鍵處下手，則問題必然迎刃而解。

先來看看「直觀」的求法：由分段邊長下手。



圖二

請參看圖二。令 $\overline{\mathbf{BM}}=\mathbf{a}$，$\overline{\mathbf{CM}}=\mathbf{b}$，$\overline{\mathbf{CN}}=\mathbf{c}$，$\overline{\mathbf{DN}}=\mathbf{d}$

則 $\triangle ABM=\frac{1}{2}a(c+d)=8$，$\triangle ADN=\frac{1}{2}d(a+b)=6$，$\triangle CMN=\frac{1}{2}bc=8$

故矩形 ABCD 面積 $S=(a+c)(b+d)$

$$
\begin{aligned}
&= ac+ad+bc+bd\\
&= (ac+ad)+(ad+bd)+bc-ad\\
&= 2\triangle ABM+2\triangle AND+2\triangle CMN-ad\\
&= 16+12+10-ad\\
&= 38-ad \text{ ....} ①
\end{aligned}
$$

考慮 $\triangle ABM \times \triangle AND=\frac{1}{2}(a+c)\cdot\frac{1}{2}(b+d) = 8\times 6$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}ad(a+b)(c+d) = 48$$

其中 $(a+c)(b+d)=S$，則 $\frac{1}{4}abS=48$

$$\Rightarrow \quad ad=\frac{192}{S} \text{ ....} ②$$

將②式代入①式得 $S=38-\frac{192}{S} \quad \Rightarrow \quad S^2-38S+192=0$

$$\Rightarrow (S-32)(S-6)=0 \quad \Rightarrow S=32 \text{ or } 6 \text{ (不合)}$$

如此，$\triangle AMN=S-\triangle ABM-\triangle ADN-\triangle CMN=32-8-6-5=13$。

這種作法基本上失去了大部分的幾何意義，如①式與②式僅給出了代數意義，欠缺了解題的一些「原味」。請注意：解法中運用了 5 個未知數 a、b、c、d 與 S。

第二種解法：

令邊長比值 $\frac{DN}{CN}=S_1$ ； $\frac{BM}{CM}=S_2$

則 $\frac{8}{5}=\frac{\triangle ABM}{\triangle CMN}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BM}\times\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{CM}\times\overline{CN}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{CN}}=S_2\cdot(1+S_1)$……………③

(其中$\overline{CD}=\overline{CN}+\overline{DN}$)

$\frac{6}{5}=\frac{\triangle ADN}{\triangle CMN}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{DN}}{\frac{1}{2}\overline{CM}\times\overline{CN}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}}=S_1\cdot(1+S_2)$……………④

(其中$\overline{BC}=\overline{BM}+\overline{CM}$)

兩式相減，得 $S_2-S_1=\frac{2}{5}$ ………………………………………… ⑤

代入①式，得 $\left(\frac{2}{5}+S_1\right)(1+S_1)=\frac{8}{5}$

$\Rightarrow\ S_1{}^2+\frac{7}{5}S_1+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}\quad\Rightarrow\ 5S_1{}^2+7S_1-6=0\quad\Rightarrow\ S_1=\frac{3}{5}$ (捨負根)

代入②式，得 $S_2=1$

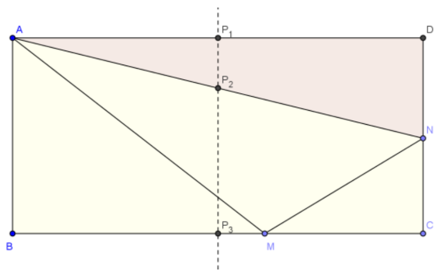
故 $\frac{\text{矩形ABCD}}{\triangle CMN}=\frac{(1+S_1)(1+S_2)}{1/2}=2\cdot\frac{8}{5}\cdot2=\frac{32}{5}$ 所以，矩形ABCD = 32

得 ΔAMN = 13 (由總面積減去分塊面積而得)。

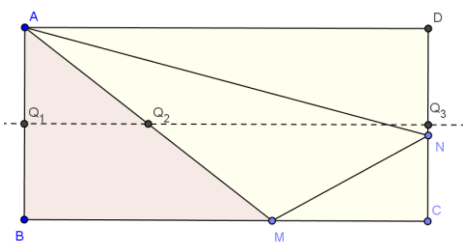
三、幾何意義的解法

本文最想分享的，是一個令人耳目一新的解法。當我們透視了幾何核心意義之後，那就僅需假設一個未知數即可。

不妨就直接設 ΔAMN = K。接下來，我們在圖上畫上一個十字 (各是每邊的中垂線)。如圖三(a)，這兩條中垂線交$\overline{AD}$於 P_1 (即$\overline{AD}$中點)，交$\overline{AN}$於 P_2，交$\overline{BC}$於 P_3 (即$\overline{BC}$中點)。如圖三（b)，則交$\overline{AB}$於 Q_1 (即$\overline{AB}$中點)，交$\overline{AM}$於 Q_2，交$\overline{CD}$於 Q_3 (即$\overline{BC}$中點)。



圖三（a）



圖三（b）

則 $\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}=$ ΔAND : 梯形 ABCN (中線長比 = 面積比)

= 6 : k+13

而 $\overline{DN}=2\overline{P_1P_2}$ ，且 $\overline{DN}+\overline{CN}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}$

故　$\overline{DN}:\overline{CN} = 12 : k+7$ ……………………………………………⑤

同理　$\overline{Q_1Q_2} : \overline{Q_2Q_3} = \triangle ABM :$ 梯形 ADCM　(中線長比 = 面積比)

$= 8 : k+11$

而　$\overline{BM} = 2\overline{Q_1Q_2}$，且 $\overline{BM}+\overline{CM} = \overline{Q_1Q_2}+\overline{Q_2Q_3}$

故　$\overline{BM}:\overline{CM} = 16 : k+3$ ……………………………………………⑤

則　$\frac{8}{5} = \frac{\triangle ABM}{\triangle CMN} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} = \frac{16}{k+3}\cdot\frac{12+(k+7)}{k+7}$

$\Rightarrow (k+3)(k+7) = 10(k+19) \quad \Rightarrow k^2 = 169 \quad \Rightarrow k = \triangle AMN = 13$。

簡潔，柔美，流暢，幾何意義一筆到位！

若$\triangle ABM = X$，$\triangle AND = Y$，$\triangle CMN = Z$

依同法可得　$\triangle AMN = \sqrt{(X+Y+Z)^2-4XY}$　。

洪萬生 2014/11/15 附記：

本文是吳允中選修「數學史」的一個作品。一開始，他與我討論的，是有關此一問題的第三種解法，因此，我要求他將解法寫下，讓我欣賞與參考。於是，他先寄給我這三個解法，但未附解題前的（歷史）情境。由於文字脈絡涉及管仲，因此，我在接到目前這個版本之後，發現其中使用了「直田」與「廣縱」術語，隨即上網搜尋有關《管子》的電子檔，然而，就是找不到這一段「引文」。沒想到，上週上「數學史」課時，他竟然跟我說，那是他掰出來的一個數學情境。

然則這個作品與數學史又有何干？原來，針對本學期的「數學史」，我所規劃的課程目標之一，就是數學史的素養有助於數學敘事（mathematical narrative） -- 說數學或數學家的故事，我想擅長編故事的允中（他目前熱衷於編寫布袋戲劇本），顯然已經達成初步的目標了。

牛頓插值多項式(上)

蘇俊鴻
北一女中

由於 **99** 課綱強調多項式「常被用來逼近一般函數，並用來求一般函數的近似值。」使得插值多項式有了學習的正當性，進而引進拉格朗日插值多項式。例如：

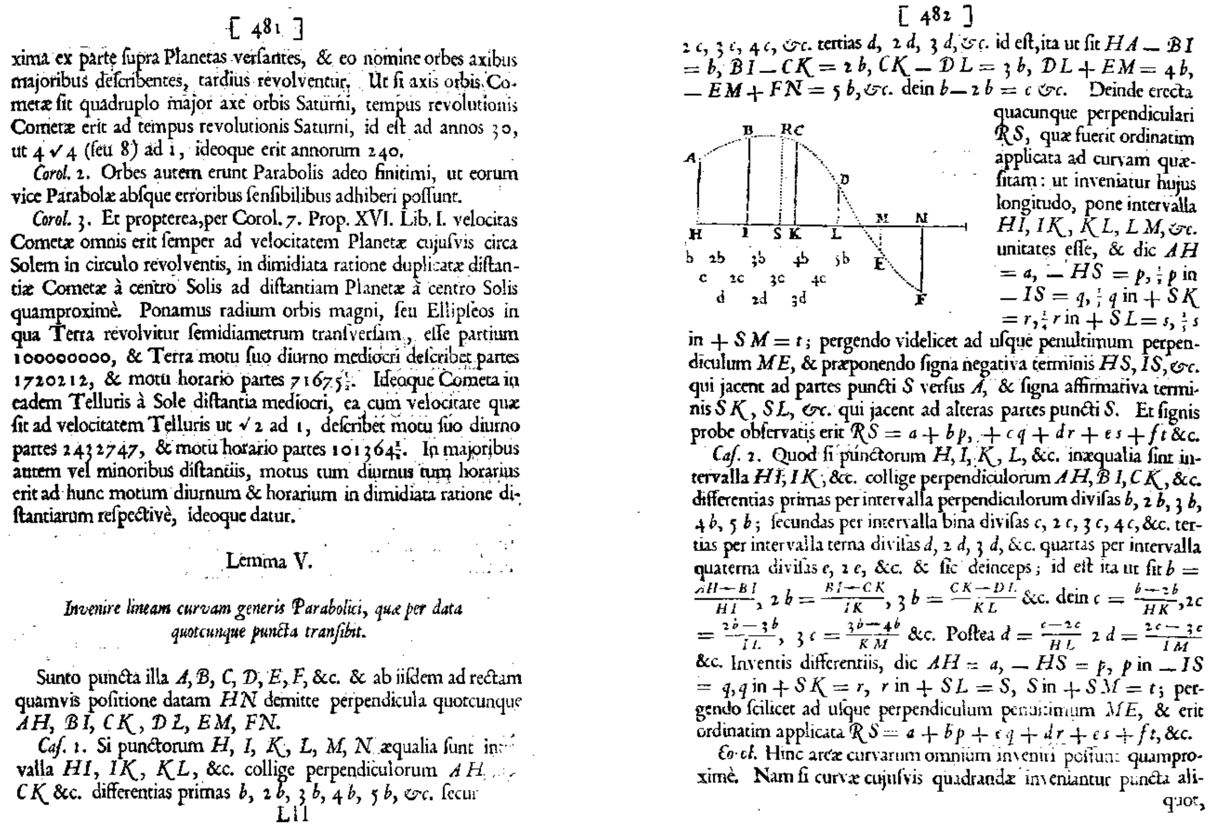
以給定平面上三點 $A(1,7)$，$B(2,6)$，$C(3,11)$ 為例，求圖形通過這三點的二次多項式。

上述的問題等同於求一個二次多項函數 $f(x)$ ，使得 $f(1)=7, f(2)=6, f(3)=11$ 。因此滿足條件的拉格朗日插值多項式為

$$f(x)=7\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+6\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+11\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

不過，許多課本還會補充另一種插值多項式的作法—牛頓插值多項式(或許是為了說明有著不同形式的插值多項式)。通常開頭會寫道：**假設基於牛頓插值多項式，滿足條件之函數** $f(x)=f(1)+a(x-1)+b(x-1)(x-2)$，再將 $f(2)=6, f(3)=11$ 代入，求出 a,b。事實上，此種補充留下的問題，恐怕比它所解決的問題還多！例如，為何牛頓插值多項式會是上述的形式？除了記憶規則外，該如何理解它呢？這個方法最早是牛頓給出的嗎？他是為了解決什麼問題呢？牛頓插值多項式的假設仍需要再求解未知數 a,b ，會比拉格朗日插值多項式便利嗎？首先，就從牛頓開始吧！

1687 年，牛頓的《自然哲學的數學原理》**(Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica)**拉丁版首次印行，牛頓在書中試圖從各個運動現象探究原因，並試圖用來解釋天文觀測的運動現象。書中提出我們所熟知的牛頓運動定律，奠定古典力學的基礎，也發表了萬有引力定律。此書從定義、公理、或運動的定律出發，推導出命題，不難看出深受《幾何原本》公理化體系的影響。無疑地，牛頓透過這樣的知識架構，並透過數學的推論來支持命題的說明，塑造《自然哲學的數學原理》的崇高地位。有關牛頓插值法的內容發表在第三編〈宇宙體系〉的引理五：**求通過任意點的拋物線類曲線**(見圖一)。其目的是為了解決引理六的問題：**已知彗星的某些觀測位置，求彗星在任意給定時刻的位置。**



[481]

xima ex parte ſupra Planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis Cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id eſt ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ abſque erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſunt.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis erit ſemper ad velocitatem Planetæ cujuſvis circa Solem in circulo revolventis, in dimidiata ratione duplicatæ diſtantiæ Cometæ à centro Solis ad diſtantiam Planetæ à centro Solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu Ellipſeos in qua Terra revolvitur ſemidiametrum tranſverſam, eſſe partium 100000000, & Terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris à Sole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in dimidiata ratione diſtantiarum reſpectivè, ideoque datur.

Lemma V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam HN demitte perpendicula quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. ſecundas

Lll

[482]

$2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $HA - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$ &c. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis erit $RS = a + bp, + cq + dr + es + ft$ &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; ſecundas per intervalla bina diviſas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas $e, 2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ &c. Poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$ $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = S$, S in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot,

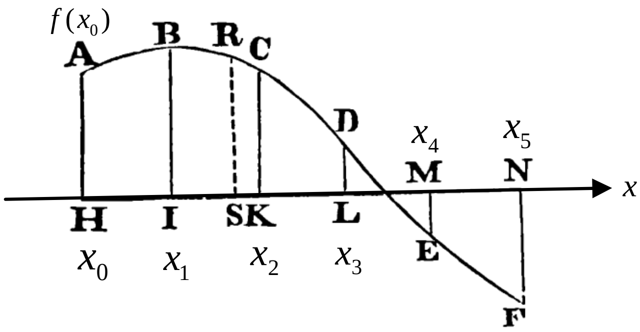
圖一 《自然哲學的數學原理》(1687 年拉丁版) 書影

下載自 **http://www.ntnu.no/ub/spesialsamlingene/ebok/02a019654.html**

事實上，從圖一清楚可見，牛頓沒有使用多項式的術語，純然運用幾何術語，將某些幾何量予以加減處理的規律，會何被認為得出插值多項式的各項係數？同時，他也沒有對方法的正確性多作說明。倒是 **1795** 年，拉格朗日在巴黎的一場演講中，對牛頓的作法做了一番解釋。據林倉億的看法，他認為拉格朗日插值多項式的原始想法可能是來自他對牛頓插值多項式的研究。此處借助現代數學符號的輔助，說明牛頓提出的作法之結果。為了簡化表示，容筆者先介紹數值分析中有關「均差」的概念和符號：設函數 $f(x)$ 有 $n+1$ 個相異點 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \cdots, (x_n, f(x_n))$。則定義一階均差及符號為 $\dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = f[x_i, x_j]$，其中 $i \neq j$。例如 $\dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_0, x_1]$。同理，定義二階均差為一階均差的均差 $\dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} = f[x_i, x_j, x_k]$，例如

$\dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = f[x_1, x_2, x_3]$。類推下去，不難想像 n 階均差應為 $n-1$ 階均差的均差

$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$。接下來，回頭來看牛頓的作法。



圖二

如圖二，牛頓假設這些點分別為 A, B, C, D, E, F ，並分別作這些點的垂線 AH, BI, CK, DL, EM, FN 到任意給定的直線 HN (設為 x 軸)，垂足分別為 H, I, K, L, M, N 。接著，牛頓分成 HI, IK, KL, LM, MN 這些間隔都等長，以及不等長的兩種情形分別討論。以下直接考慮不等長的一般情形，設 H, I, K, L, M, N 各點的 x 坐標分別為 $x_0, x_1, \cdots, x_5$ ，則 $A(x_0, f(x_0))$ ， $B(x_1, f(x_1))$ ， $C(x_3, f(x_3))$ ， $D(x_4, f(x_4))$ ， $E(x_4, f(x_4))$ ， $F(x_5, f(x_5))$ 。若 S 點的坐標為 x ，其目的是要求出 $RS = f(x)$ 之值。首先，考慮 AH, BI, CK, DL, EM, FN 彼此的長度差與 HI, IK, KL, LM, MN 這些間隔的比值

$$\frac{AH-BI}{HI} = b = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_1-x_0} = -f[x_0, x_1]\text{；}$$

$$\frac{BI-CK}{IK} = 2b = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1} = -f[x_1, x_2]$$

$$\frac{CK-DL}{KL} = 3b = \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_3-x_2} = -f[x_2, x_3]\text{；}$$

$$\frac{DL+EM}{ML} = 4b = \frac{f(x_3)+(-f(x_4))}{x_4-x_3} = \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_4-x_3} = -f[x_3, x_4]$$

$$\frac{-EM+FN}{NM} = 5b = \frac{-(-f(x_4))+(-f(x_5))}{x_5-x_4} = \frac{f(x_4)-f(x_5)}{x_5-x_4} = -f[x_4, x_5]\text{。}$$ [1]

牛頓稱這些 b 為「一次差」，接著就是「二次差」

$\frac{b-2b}{HK} = c = \frac{-f[x_0,x_1]-(-f[x_1,x_2])}{x_2-x_0} = f[x_0,x_1,x_2]$ ； $\frac{2b-3b}{IL} = 2c = f[x_1,x_2,x_3]$ 。同理，「三次差」$d = \frac{c-2c}{HL} = -f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ ，「四次差」($e = \frac{d-2d}{HM} = f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ ，「五次差」$f = \frac{e-2e}{HN} = -f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ 。

找出這些差之後，再令 $AH = a = f(x_0)$ ， $p = -HS = (x_0 - x)$ ，

[1] 此處牛頓使用的 $b, 2b, 3b, 4b, 5b$ 彼此並無關係。同理， c, d, e, f 也是相同情形。

$$q = p\times(-IS) = (x_0 - x)(x_1 - x) = (x - x_0)(x - x_1)$$，

$$r = q\times(+SK) = (x - x_0)(x - x_1)(x_2 - x) = -(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$，

$$s = r\times(+SL) = -(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x_3 - x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$，

$$\begin{aligned} t = s\times(+SM) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x_4 - x) \\ &= -(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \end{aligned}$$

其中，在 S 到 A 的各項 HS, IS 要加負號；另一側的項 SK, SL, SM 則加正號。如此一來，就能寫出 RS 的值：

$$\begin{aligned} RS &= f(x) = a + bp + cq + dr + es + ft + \ldots \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \end{aligned}$$

這個結果與現行數值分析中所談的牛頓插值多項式完全吻合。做個練習，讓我們更加掌握牛頓插值多項式，就以文章開頭的例子

　　求一個二次多項函數 $f(x)$，使得 $f(1) = 7, f(2) = 6, f(3) = 11$。

由上述可知，找一次差 $f[1,2] = \dfrac{7-6}{1-2} = -1$； $f[2,3] = \dfrac{6-11}{2-3} = 5$，二次差 $f[1,2,3] = \dfrac{(-1)-5}{1-3} = 3$。因此，所求函數為 $f(x) = f(1) - (x-1) + 3(x-1)(x-2)$。

　　由上述說明，讀者不難發現牛頓提出的插值多項式係數是直接就能求得，這比起課本提及的方法更為便捷！此外，牛頓並沒有留下任何線索提示我們他是如何得到這個形式。在下一篇〈牛頓插值多項式(下)〉中，我們試圖以多項式的知識給出一個教學上適切的引導，並對係數的求法會有更詳盡的介紹。

參考文獻

林倉億，〈牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說？〉，《**HPM** 通訊》第 **15** 卷第 **10** 期**(2012)**：頁 **1-7**。

《自然哲學的數學原理》線上閱讀

http://en.wikisource.org/wiki/The_Mathematical_Principles_of_Natural_Philosophy_(1846)/BookIII-Prop6

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！