已知實數 $x$、$y$、$z$ 滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{5}$，則 $3x+2y+z=$________。答：33

解：設 $x+y+z=a$，則 $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{a-y}=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{a-z}=\frac{1}{5}\end{cases}$

由第一式 $\Rightarrow \frac{a-x+x}{x(a-x)}=\frac{1}{3} \Rightarrow x^2-ax+3a=0$

同理由第二三兩式可得 $y^2-ay+4a=0$ 及 $z^2-az+5a=0$

將剛剛得到的三式相加 $\Rightarrow x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)+12a=0$ 又 $x+y+z=a$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=a^2-12a$

另一方面 $a^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow a^2=a^2-12a+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=6a$

再由 $x^2-ax+3a=0 \Rightarrow x^2-(x+y+z)x+3a=0 \Rightarrow xy+xz=3a$

同理 $y^2-ay+4a=0 \Rightarrow y^2-(x+y+z)y+4a=0 \Rightarrow xy+yz=4a$

$z^2-az+5a=0 \Rightarrow z^2-(x+y+z)z+5a=0 \Rightarrow xz+yz=5a$

再加上 $xy+yz+zx=6a$ 得到 $xy=a$，$yz=3a$，$zx=2a$

得到 $x:y:z=2:3:6$ 因此 $x=\frac{2}{11}a$，$y=\frac{3}{11}a$，$z=\frac{6}{11}a$，

今求 $3x+2y+z=\frac{18}{11}a$ 又將 $x=\frac{2}{11}a$，代入 $x^2-ax+3a=0$ 得到 $a=\frac{121}{6}$

$\Rightarrow 3x+2y+z=\frac{18}{11}a=\frac{18}{11}\times\frac{121}{6}=3\times11=33$