# 大學入學考試中心
# 108 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

**第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）**

**一、單選題（佔 18 分）**

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金400元；若出現一正一反可得獎金800元；若出現兩個正面可得獎金800元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？
(1)850元 (2)875元 (3)900元 (4)925元 (5)950元。 【108 數甲】

答：(2)

解：

| $A$ | 兩反 | 一正一反 | 兩正 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 兩反 | 一正一反 | 兩正 |
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$ |
| \$ | 400 | 800 | $800+400$ | $800+800$ | $800+800$ |

$E(X)=\sum P\$=100+400+75+200+100=875$

2. 設$n$為正整數。第$n$個費馬數（Fermat Number）定義為$F_n=2^{\left(2^n\right)}+1$，例如$F_1=2^{\left(2^1\right)}+1=2^2+1=5$，$F_2=2^{\left(2^2\right)}+1=2^4+1=17$。
試問$\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？
（$\log 2\approx 0.3010$）
(1)120 (2)240 (3)600 (4)900 (5)1200。 【108 數甲】

答：(5)

解：$\log\dfrac{F_{13}}{F_{12}}=\log\dfrac{2^{\left(2^{13}\right)}+1}{2^{\left(2^{12}\right)}+1}\doteqdot\log 2^{\left(2^{13}-2^{12}\right)}\doteqdot 2^{12}\times 0.3010\doteqdot 1232.896$

3. 在一座尖塔的正南方地面某點$A$，測得塔頂的仰角為$14°$；又在此尖塔正東方地面某點$B$，測得塔頂的仰角為$18°30'$，且$A$、$B$兩點距離為65公尺。已知當在線段$\overline{AB}$上移動時，在$C$點測得塔頂的仰角為最大，則$C$點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？
（$\cot 14°\approx 4.01$，$\cot 18°30'\approx 2.99$）
(1)27公尺 (2)29公尺 (3)31公尺 (4)33公尺 (5)35公尺。 【108 數甲】

答：(3)

解：$\overline{OA}=h\cot 14°\doteqdot 4.01h$，$\overline{OB}=h\cot 18°30'\doteqdot 2.99h$

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2\doteqdot\overline{AB}^2\Rightarrow 5h\doteqdot 65\Rightarrow h\doteqdot 13$

$$\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{\overline{AB}\times d}{2}\Rightarrow d\fallingdotseq\frac{4\times13\times3\times13}{65}\fallingdotseq31.2$$

## 二、多選題（佔 40 分）

4. 設 $\Gamma$ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $\left(0,\frac{7}{2}\right)$ 兩點的圓。試選出正確的選項。
   (1) $\Gamma$ 的半徑大於或等於 5
   (2) 當 $\Gamma$ 的半徑達到最小可能值時，$\Gamma$ 通過原點
   (3) $\Gamma$ 與直線 $x+2y=6$ 有交點
   (4) $\Gamma$ 的圓心不可能在第四象限
   (5) 若 $\Gamma$ 的圓心在第三象限，則 $\Gamma$ 的半徑大於 8。【108 數甲】

答：(2)(5)

解：(1)(2)最小圓以 $(7,0)$、$\left(0,\frac{7}{2}\right)$ 為直徑端點

$$\Rightarrow(x-7)(x)+(y)\left(y-\frac{7}{2}\right)=0\Rightarrow x^2+y^2-7x-\frac{7}{2}y=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

其中，$r=\frac{7\sqrt{5}}{4}<5$，且圓過 $(0,0)$

(3) $\Gamma$ 與直線 $x+2y=6$ 不一定有交點

(4)(5)圓心在 $(7,0)$、$\left(0,\frac{7}{2}\right)$ 的中垂線 $2x-y=\frac{21}{4}$ 上會過第四象限，

且當圓心在第三象限，則 $\Gamma$ 的半徑大於 $d\left(\left(0,\frac{-21}{4}\right),\left(0,\frac{7}{2}\right)\right)=\frac{35}{4}>8$

5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。
   今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。
   試選出正確的選項。
   (1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
   (2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
   (3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
   (4)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
   (5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率。
   【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1) $P(R_1)=P(R_2)$，均為 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=P(R_1)\times P(R_2)$

(3) $P(R_1\cap(W_2\cup B_2))\neq0$

(4) $P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=P(W_1\cap W_2)$

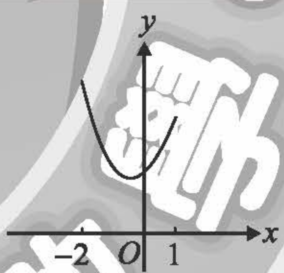
(5) $P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20} < \frac{3! \times \frac{3!}{1!2!}}{\frac{6!}{2!3!1!}} = \frac{3}{10} = P$（前三球顏色相異）

6. 設$\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數$n$，$a_n < b_n^2 < a_{n+1}$均成立。若已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$，試選出正確的選項。
(1)對所有的正整數$n$，$a_n > 3$均成立
(2)存在正整數，使得$a_{n+1} > 4$
(3)對所有的正整數$n$，$b_n^2 < b_{n+1}^2$均成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = 4$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$或$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$。【108 數甲】

答：(3)(4)

解：(1)錯，因$\langle a_n \rangle$為嚴格遞增數列，所以無此必然
(2)錯，因$\langle a_n \rangle$為嚴格遞增數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$
(3)對，$a_n < b_n^2 < a_{n+1}$且$a_{n+1} < b_{n+1}^2 < a_{n+2}$
(4)對，夾擠定理
(5)錯

7. 已知三次實係數多項式函數$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$，在$-2 \le x \le 1$範圍內的圖形如示意圖，試選出正確的選項：
(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4)方程式$f(x) = 0$恰有三實根
(5) $y = f(x)$圖形的反曲點的$y$坐標為正。【108 數甲】




答：(2)(3)(5)

解：(1) $a < 0$時，圖形合於條件 (4)應僅一實根

8. 坐標平面上以原點$O$為圓心的單位圓上三相異點$A$、$B$、$C$滿足$2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$，其中$A$點的坐標為$(1,0)$，試選出正確的選項：
(1)向量$2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$的長度為4 (2)內積$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$
(3) $\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$中，以$\angle BOC$的度數為最小
(4) $\overline{AB} > \frac{3}{2}$ (5) $3\sin\angle AOB = 4\sin\angle AOC$。【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1) $\left|2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|-4\overrightarrow{OC}\right|^2 \Rightarrow \left|2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}\right| = 4$

(2) $\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|^2 \Rightarrow 4+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9=16 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}$

(3) $\left|3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|-2\overrightarrow{OA}\right|^2 \Rightarrow 9+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16=4 \Rightarrow \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-7}{8}$

$\left|2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|-3\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow 4+16\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+16=9 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{-11}{16}$

故$\angle BOC > \angle AOC > \angle AOB$

(4) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=1-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{3}{2}$

(5) $\cos\angle AOB=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin\angle AOB=\frac{\sqrt{15}}{4}$、$\cos\angle AOC=\frac{-11}{16} \Rightarrow \sin\angle AOC=\frac{3\sqrt{15}}{16}$

故$3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

## 三、選填題（佔 18 分）

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，

其中$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$代表舊坐標，$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$代表新坐標，若舊坐標為$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$的點$P$經此坐標變換

得到的新坐標為$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，則$(r,s)=$________。【108 數甲】

答：$(3,-1)$

解：$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}\times\frac{1}{2}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$、$B(b,s)$為函數圖形$y=\log_2 x$上之兩點，其中$a<b$。已知$A$、$B$連線的斜率等於$2$，且線段$\overline{AB}$的長度為$\sqrt{5}$，則$(a,b)=$________。

(化成最簡分數)【108 數甲】

答：$\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

解：$A(a,r)\xrightarrow{m_{AB}=2,\ \overline{AB}=\sqrt{5}}B(a+1,r+2)=(b,5)$

$\Rightarrow \begin{cases} r=\log_2 a \\ r+2=\log_2 (a+1) \end{cases} \Rightarrow 2=\log_2\frac{a+1}{a} \Rightarrow \frac{a+1}{a}=4 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$

C. 設$z$為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為$z$、$0$、$z+5-2\sqrt{3}i$(其中$i=\sqrt{-1}$)，則$z$的實部為________。(化成最簡分數)

【108 數甲】

答：$-\frac{7}{2}$

解： $z\times(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)=z+5-2\sqrt{3}i \Rightarrow \left(\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=5-2\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z=\frac{5-2\sqrt{3}i}{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

**第貳部分：非選擇題（佔 24 分）**

一. 坐標空間中以 $O$ 表示原點，給定兩向量 $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$、$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$。試回答下列問題。

(1) 若 $\overrightarrow{OP}$ 是長度為 2 的向量，且與 $\overrightarrow{OA}$ 之夾角為 $60^\circ$，試求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的內積。(2 分)

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 $P$ 均落在一平面 $E$ 上，試求平面 $E$ 的方程式。(2 分)

(3) 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，分別與 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 之夾角皆為 $60^\circ$，已知滿足此條件的所有點 $Q$ 均落在一直線 $L$ 上，試求直線 $L$ 的方向向量。(4 分)

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 $Q$ 點之坐標。(4 分) 【108 數甲】

答：(1) 2 (2) $x+\sqrt{2}y+z=2$ (3) $(0,1,-\sqrt{2})$ (4) $\begin{cases}x=1\\y=t\\z=1-\sqrt{2}t\end{cases},t\in R$

解：(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2\times2\times\cos60^\circ=2$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{2},1)\cdot(x,y,z)=2 \Rightarrow x+\sqrt{2}y+z=2$

(3)(4) $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=(1,\sqrt{2},1)\cdot(x,y,z)=2\times2\times\cos60^\circ\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=(2,0,0)\cdot(x,y,z)=2\times2\times\cos60^\circ\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=2\\2x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\\sqrt{2}y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=t\\z=1-\sqrt{2}t\end{cases},t\in R$$

二. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq1$ 恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$。(2 分)

(2) 試求 $f'(x)$。(4 分)

(3) 試求 $f(x)$。 (2 分)

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 $a$ 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。(4 分) 【108 數甲】

答：(1) 2 (2) $f'(x)=12x^2-6x+2$ (3) $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

解：(1) $1\times f(1)=3-2+1+0\Rightarrow f(1)=2$

(2) $f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+f(x)$

$\Rightarrow f'(x)=12x^2-6x+2$

(3) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+k \xrightarrow{f(1)=2} k=-1$

(4) $\int_0^a f(x)=\left[x^4-x^3+x^2-x+C\right]_0^a=a^4-a^3+a^2-a=1$

令 $f(x)=x^4-x^3+x^2-x=x(x-1)\left(x^2+1\right)$

故知僅有一大於 1 的正實數，與一小於 0 的負實數

可使 $y=x^4-x^3+x^2-x$ 圖形與 $y=1$ 有交點