國立竹北高中 108 學年度第 1 學期第 2 次教師甄選______ 科試題卷

請考生自填：准考證號碼：____________　　　　姓名：__________

一、填充題

1.小穎的冰箱中有 5 顆士力架巧克力及 7 根加倍佳棒棒糖，今自 108 年 6 月 6 日起每天吃一個（巧克力或棒棒糖中的一個），直到冰箱內的巧克力及棒棒糖吃完為止．若這 5 顆巧克力及 7 根棒棒糖被吃到的機會均等，則在這種吃的過程中，冰箱內剩下巧克力數不多於冰箱內剩下棒棒糖個數的機率為____________．

2.若曲線 $y=x^3-9x^2+15x+7$，點 $P(0,a)$在曲線之外，$a\in\mathbb{R}$，若過 P 的切線可以有相異的三條時，求 a 的範圍為____________．

3.試求 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\cdot\frac{1}{5^{n-1}}$ ____________．

4.空間中，有一平面 E 過點 $P(2,3,1)$，且分別交 x 軸，y 軸，z 軸之正向於 A，B，C 三點，O 為原點，且 $k=2\overline{OA}+3\overline{OB}+4\overline{OC}$

(1)求 k 之最小值____________．

(2)k 有最小值時，平面 E 的方程式____________．

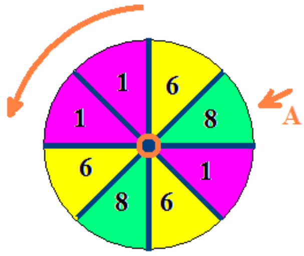
5.對於曲線 $f(x)=x^3$ 與 $x=0,x=1$ 及 x 軸所圍成區域，將閉區間 $[0,1]$ n 等分成 n 個區域，U_n,L_n 分別為上和、下和；若 $|U_n-L_n|<10^{-4}$，試求 n 的最小正整數____________．

6. 有一光源位於 $(-4,7)$，試求曲線 $y=\sqrt{x(4-x)}$ 落在 x 軸的投影長 ____________．

7.若水中有一半徑為 3 公分的球，其中浮出水面 1 公分，求此球在水面上的體積為

____________ 立方公分.

8.如圖，轉盤游戲．轉盤被分成 8 個均勻的扇形區域．游戲規則：用力旋轉轉盤，轉盤停止時箭頭 A 所指區域的數字就是游戲所得的點數(轉盤停留的位置是随機的)．假设箭頭指到區域分界線的機率为 0.1，同時規定所得點數为 0．某同學進行了一次游戲，記所得點數為 ξ．求 ξ 的期望值____________．



9.已知 O 為原點， A,B 為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上兩點，且 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$ ，則 $\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}=$____________.

二、計算證明題

1.試就 a 值討論方程組 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 的解，並說明其幾何意義．

2.設一隨機試驗的樣本空間 S 只有兩個樣本點 a 及 a'，令事件 $A=\{a\}$，$A'=\{a'\}$，並設事件 A 發生的機率為 $p\ (0<p<1)$，不發生的機率為 $q\ (=1-p)$．今將此試驗重複 n 次，令 X 表示事件 A 發生的次數，試證：X 的期望值為 np．

3.已知一圓柱形玉米罐頭，底面的圓半徑為 r，表面積為 V，若不考慮罐頭厚度，欲獲得最大體積，試求此時罐頭高度與半徑的比值。

4. 已知數列 $\langle a_n\rangle$，滿足 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+1\ ,(n\in N) \end{cases}$；

(1)求數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般式.

(2)若數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $4^{b_1-1}\bullet4^{b_2-1}\bullet4^{b_3-1}\bullet\cdots\bullet4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ ，試證數列 $\langle b_n\rangle$ 為等差數列.

5. 已知斜三稜柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各稜長均為 2，測稜 BB_1 與底面 ABC 所成角為 $\frac{\pi}{3}$，

且側面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC.

（1）證明：點 B_1 在平面 ABC 上的投影點 O 为 AB 的中點.

（2）求點 C_1 到平面 CB_1A 的距離.