

科目：數學科

選擇題：共 40 題，總分 100 分。每題 2.5 分

- 海拉魯平原上有兩座高塔，高度分別為 15, 20 公尺。現在分別從每一高塔的頂端向對面高塔的底面射出雷射光線，兩光線在空中交於一點。請問該交點距離地面的高度為多少公尺？
(A) $\frac{60}{7}$ (B) 9 (C) $\frac{100}{9}$ (D) $\frac{75}{8}$
- 坐標平面上，直線 $ax+by+c=0$ 不通過第二象限，其中 a, b, c 皆為非零常數。則直線 $bx-cy+a=0$ 必不通過哪一象限？
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 已知某年的四月有三個星期日的日期是偶數。請問該年的四月 4 日是星期幾呢？
(A) 星期日 (B) 星期二 (C) 星期四 (D) 星期六
- 坐標平面上，兩坐標均為整數的點稱為「格子點」。請問有多少個格子點與原點 $(0,0)$ 的距離為 $\sqrt{65}$ ？
(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32
- 公園裡圍了一塊三角形的空地，其邊長分別是 7 公尺 20 公分、8 公尺 40 公分、10 公尺 80 公分。今公園管理處要在此塊空地周圍擺盆栽，使得相鄰盆栽的間隔距離皆相等，並且三角形的三個頂點皆要放置盆栽。請問下列哪一個數字，可以是放置盆栽的數量？
(A) 21 (B) 33 (C) 38 (D) 44
- 下面哪一個多項式不能分解成兩個（至少一次的）實係數多項式的乘積？
(A) x^2+2 (B) x^3+3 (C) x^4+4 (D) x^5+5
- 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸交於 $(-1,0), (6,0)$ 兩點，而二次函數 $y=ax^2+bx+c+1$ 的圖形與 x 軸交於 $(1,0), (4,0)$ 兩點。請問 a 值為何？
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$
- 已知直線 $L: 2x+3y=0$ ，將 L 向右平移 2 單位得到直線 L_1 ，求 L_1 的方程式。
(A) $y=-\frac{2}{3}(x-2)$ (B) $y=-\frac{2}{3}(x+2)$ (C) $y=-\frac{3}{2}(x-2)$ (D) $x=-\frac{2}{3}(y-2)$
- 若聯立方程組 $\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases}$ 無解，則常數 a 之值為多少？
(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2
- 滿足 $1 \leq x \leq y < z \leq w \leq 10$ 的正整數 (x, y, z, w) 共有幾組？
(A) 210 (B) 330 (C) 495 (D) 715

11. 已知等腰三角形 ABC 的腰長為 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ，底邊為 $\overline{BC} = 10$ 。令三角形 ABC 的內心為 I ，外心為 O ，則 \overline{OI} 長度為多少？

- (A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{13}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

12. 碳-60 分子是一個非常穩定的化學結構，可以用一個有 60 個頂點的凸多面體來呈現：每一個頂點與另外三個頂點相連，而且每一個頂點是兩個正六邊形與一個正五邊形交會之處。請問這樣的模型中，正六邊形與正五邊形的個數總和為多少？

- (A) 26 (B) 28 (C) 30 (D) 32

13. 設 a, b, c 為實數。若 $\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 對所有的實數 $x \neq 1$ 均成立，則 $a+b+c$ 之值為何？

- (A) -1 (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

14. 設 α, β 為二次方程式 $x^2 + 6x + 3 = 0$ 的兩根。請問：以 $\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\beta+2}$ 為兩根的二次方程式為何？

- (A) $5x^2 - 2x - 1 = 0$ (B) $3x^2 + 4x - 1 = 0$ (C) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (D) $x^2 - 4x - 3 = 0$

15. 考慮平面上的直線 $L: x - 3y = 5$ ，以及平面上任一點到這條直線的投影點。請問：所有投影點為 $(-1, -2)$ 的點滿足的方程式為何？

- (A) $x - 3y = 5$ (B) $3x - y = -1$ (C) $x + 3y = -7$ (D) $3x + y = -5$

16. 臺灣本島的面積約為 35,873.196 平方公里。現在小銘想要繪製比例尺 1:100 的臺灣本島地圖，那麼她大概需要多少張 A4 大小的紙拼在一起，才能畫出這張地圖？（註：A4 紙的尺寸是 210 毫米乘以 297 毫米）

- (A) 5.8×10^5 張 (B) 5.8×10^7 張 (C) 5.8×10^9 張 (D) 5.8×10^{11} 張

17. 某個三角形的三條中線長度分別為 4, 6, 8。則此三角形的面積等於多少？

- (A) $3\sqrt{15}$ (B) $4\sqrt{15}$ (C) $6\sqrt{15}$ (D) $8\sqrt{15}$

18. 已知絕對值不等式 $|ax+1| \leq b$ 的解區間為 $-3 \leq x \leq 5$ ，請問 $a+b$ 之值為多少？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

19. 平平參加丟銅板比賽，持續丟擲一枚均勻銅板，直到出現正面時才停止。若正面出現在第 k 次丟擲，則可得分數 k 分。則平平所得分數的期望值為多少？

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

20. 考慮三次函數 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ 。請問下列哪一個數最接近 $f(0.9999)$ ？

- (A) 0.9997 (B) 0.9999 (C) 1.0001 (D) 1.0003

21. 阿倫練習尺規作圖。他先在紙上畫了一個銳角 A ，並依下列步驟操作：

- (1) 以 A 為圓心，適當長度為半徑作圓 Ω ，與角 A 的兩邊分別交 B 、 C 兩點。
- (2) 以 B 為圓心， \overline{BC} 為半徑作圓 ω ；令圓 Ω 與圓 ω 的另一交點為 D 點。
- (3) 連直線 CD 。

請問：直線 CD 是什麼？請選出最適當的選項。

- (A) 直線 AB 的垂線 (B) 線段 \overline{AB} 的中垂線 (C) 角 A 的角平分線 (D) 直線 AC 的垂線

22. 設 θ 為第二象限角，且 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 。則 $\tan \frac{\theta}{2}$ 等於多少？
 (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) -3
23. 下列哪一個數的正因數總和為偶數？
 (A) 6^6 (B) 7^7 (C) 8^8 (D) 9^9
24. 空間中四點 $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,2)$, $C(3,2,1)$, $D(-1,-a-1,a)$ 共平面，試求 a 值。
 (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) 1
25. 試求 $36^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \times 6^{-\sqrt{2}}$ 之值。
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) 1 (C) $\sqrt{6}$ (D) $\frac{1}{36}$
26. 已知二次函數 $f(x) = -x^2 + 2x + 6$ ，試求此函數 $f(x)$ 在 $2 \leq x \leq 3$ 範圍內的最大值。
 (A) 0 (B) 6 (C) 7 (D) 8
27. 已知 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(1,1)$, $B(4,0)$, $C(3,1)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式。
 (A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (B) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ (C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ (D) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$
28. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 與直線 $L: 4x + 3y + 7 = 0$ 相割，試求割線段長。
 (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$
29. 設 $\{a_n\}$ 為等比數列，且滿足 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $a_2 + a_3 + a_4 = 42$ ，試求此等比數列前七項的和。
 (A) 381 (B) 405 (C) 420 (D) 450
30. 試求級數 $1 \times 5 + 2 \times 9 + 3 \times 13 + \dots + 14 \times 57$ 的和(每一項都是兩等差數列逐項相乘)。
 (A) 4160 (B) 4165 (C) 4200 (D) 4250
31. 設坐標平面上三點 $A(1,2)$, $B(4,6)$, $C(3,3)$ ，試求 \overline{AB} 在 \overline{AC} 方向上的分量(或投影量)。
 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{7}$
32. 若袋中有 300 個紅球，200 個藍球，每次從袋中抽取一球，抽球後放回，抽球兩次。設 X 代表兩次中抽到紅球的次數，試求 $P(X=1)$ 。
 (A) 0.12 (B) 0.24 (C) 0.36 (D) 0.48
33. 某工廠生產燈泡，其品檢部門在檢驗燈泡品質時是從每一盒(每盒 12 個)中任取 4 個來檢查，如果有 2 個或 2 個以上是不合格燈泡，則整盒淘汰。若某一盒燈泡中有 5 個不合格燈泡，則此盒燈泡被品檢部門淘汰的機率為？
 (A) $\frac{14}{33}$ (B) $\frac{17}{33}$ (C) $\frac{19}{33}$ (D) $\frac{23}{33}$
34. 設 $x \neq 0$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$ 之值。
 (A) 不存在 (B) -1 (C) 0 (D) 1

35. 設三角形三邊長為 a, b, c ，其對角為 $2\theta, 3\theta, 4\theta$ ，試求 $\sec \theta$ 之值。

- (A) $\frac{2b}{a+c}$ (B) $\frac{2c}{a+b}$ (C) $\frac{2a}{b+c}$ (D) $\frac{a}{b+2c}$

36. 設 $x \neq \frac{\pi}{2}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [(\pi - 2x) \tan x]$ 之值。

- (A) ∞ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 2

37. 已知 $\log a = 1.02$ ，求 $0.01^{0.01}$ 之值（以 a 表示）。

- (A) a (B) $10a$ (C) $\frac{1}{a}$ (D) $\frac{10}{a}$

38. 試求 $\sum_{k=1}^9 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ 之值。

- (A) $\frac{89}{100}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{88}{101}$ (D) $\frac{98}{101}$

39. 試求方程式 $\frac{x^2-4x}{x^2-4} + 2 = \frac{1}{2-x}$ 的根的個數。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

40. 空間中兩歪斜線 $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-2}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$ ，試求直線 L_1 與 L_2 的距離。

- (A) 3 (B) $3\sqrt{2}$ (C) 5 (D) $5\sqrt{2}$