

新北市立高級中等學校 108 學年度教師聯合甄選
數學科 試題

一、填充題：72%，每題 6 分。

1. 三腿跑步圖是英屬地曼島的代表性標誌，它是由一隻穩健跑步的腿，透過旋轉形成一個無限循環卻永不摔倒的姿勢，如下圖所示：



若將此三腿跑步圖的旋轉點（即三條腿共接的點）貼合在複數平面的原點，並發現一腳尖所對應的複數為 $2+8\sqrt{3}i$ ，則另外兩腿的腳尖所對應的複數為何？

2. 在 1781 年，日本藤田貞資於《精要算法》中提出所謂「蟲蝕算」這種填字遊戲。顧名思義，蟲蝕算遊戲就是將算式中打 \square 被蟲損傷的地方，根據算術或代數推理手段恢復原來的數字使算式成立。下圖是一道稱為〈一個 8〉的蟲蝕算遊戲：

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \quad 8 \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square
 \end{array}$$

試問：這道遊戲算式乘出來後，最下方的四位數字為何？_____

3. 設 $f(x)$ 為二次多項式函數，且對所有的實數 x 恆有 $f(x-2) = f(-x-2)$ 。已知 $f(x)$ 的圖形在 y 軸上的截距為 1，在 x 軸上截得的線段長為 $2\sqrt{2}$ ，則 $f(x)$ 為_____。
4. 已知 $\tan x \tan y \tan z = 1$ ，則 $\sin x \sin y \sin z$ 的最大值為_____。
5. $7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ 總共 2019 個 7，請問此數除以 100 的餘數為_____。

6. 邊長為1的正五邊形內部，去掉同時與五個頂點距離皆小於1的點後，剩下的面積是_____。

7. 一長方體的最長對角線，與不相鄰邊的距離分別為 $2\sqrt{5}$, $\frac{30}{\sqrt{13}}$, $\frac{15}{\sqrt{10}}$ ，則此長方體體積為_____。

8. $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 與 $x + y - 3z = 5$ 所交出來的曲線上，離 xy -平面最遠的點為_____。

9. 設 p, q 為實數使得

$$x^3 + 3x^2 + px - q = 0$$

的三根成等差數列，且同時使得

$$x^3 + (2-p)x^2 - (q+3)x - 8 = 0$$

的三根成等比數列，則數對 (p, q) 為_____。

10. 求 $\frac{1}{\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{\sin^2 20^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ}$ 的值為_____。

11. 甲、乙兩人輪流投籃，甲先投，直到其中一位投進為止；已知甲的命中率為 $\frac{3}{5}$ ，

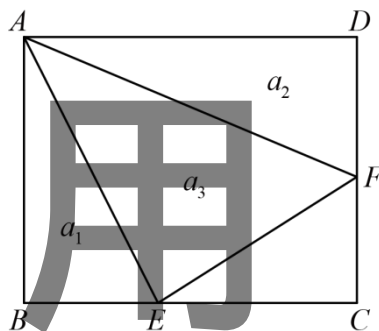
乙的命中率為 $\frac{2}{5}$ ，且 X 表示甲投籃的次數，則機率 $P(X=2)$ 的值為_____。

12. $n \in \mathbb{N}$ ，有 $2n$ 顆紅球、 $2n$ 顆黑球、 $2n$ 顆白球，分成球數目一樣多的兩堆(各 $3n$ 顆)，請問有_____種分法。

二、計算證明題：28%，每題14分。

1. 證明圓週率 π 的小數位數中，必可取出連續的幾位數，其值為2019的倍數。
(例如：從3.14159265358中，取出159265，其值為601的倍數)

2. 如下圖所示： $ABCD$ 是面積為 R 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明： $R^2 - 2a_3R - 4a_1a_2 = 0$ 。