中正國防幹部預備學校

108 年教師甄選測驗試題

數學考科

- 作答注意事項 –

考試時間：100 分鐘

題型題數：總共 27 題

- 第壹部分　單選題共 8 題，每題 3 分
- 第貳部分　填充題共 19 題，每題 4 分

作答方式：

1. 一律用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）
2. 未依規定劃記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，其後果由考生自行負擔
3. 答案卡每人一張，不得要求增補
4. 作答後，試卷與答案卡須一併繳回

第壹部分：單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡。各題答對者，得 3 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設a,b,c為三角形的三邊長，且$\begin{vmatrix} a(a+1) & a & b+c \\ b(b+1) & b & c+a \\ c(c+1) & c & a+b \end{vmatrix}=0$，則此三角形必為什麼三角形？

(1)任意三角形　(2)正三角形　(3)等腰直角三角形　(4)直角三角形　(5)等腰三角形．

2. 大鋒與小旭競選預校中正青年，已知投票箱中有 8 張票投給大鋒，有 5 張票投給小旭，且開票過程中，大鋒的票數一直領先小旭的票數，試問滿足此狀況的方法數有幾種？

(1)42　(2)90　(3)132　(4)165　(5)297

3. 求$y=\frac{x}{a}(x-a)$與$x=\frac{y}{a}(y-a)$所圍區域的面積為何？

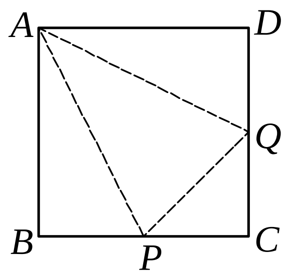
(1)$\frac{8}{3}a^2$　(2)$\frac{10}{3}a^2$　(3)$\frac{11}{3}a^2$　(4)$\frac{13}{3}a^2$　(5)$\frac{14}{3}a^2$

4. 求$\sum_{k=1}^{108}\left[\log_{\frac{1}{2}} k\right]$的值為何？[ ]為高斯符號。

(1) − 521　(2) − 528　(3) − 535　(4) − 629　(5) − 636

5. 設$f(x)=x^2+2x-3$，在$-4\le x\le -2$時，$f(f(f(x)))$的最大值與最小值之和為？(1)28　(2)29　(3)32　(4)1081　(5)1085

6. 如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，而 P, Q 各為 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 的中點，今將此正方形沿虛線向上摺起，使 B, C, D 三點重合，令此重合點為 R，則 R 到△APQ 的距離為多少？



(1)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(2)$\dfrac{2}{3}$　(3)$\dfrac{4}{3}$　(4)$3\sqrt{2}$　(5)$2\sqrt{2}$

7. 愛漂亮的小飛象欲將四隻腳穿上襪子，再穿鞋子，若襪子、鞋子均視為相同，此外，還要將 1 條心愛的腳鍊繫於右後腳上，腳鍊穿搭順序沒有限制，請問小飛象完成著裝的方法數有幾種？

(1)2520　(2)7560　(3)22680　(4)45360　(5)90720

8. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{900}$ 為實數且 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{900}$，$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{900}^2 = 1$，若 a_n 的最大值為 M_n，試求 $\sum_{n=1}^{900} M_n$ 的整數部分為何？

(提示：$\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2} < \sqrt{n} < \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$，$n$ 為自然數)

(1) 58　(2) 59　(3) 60　(4) 61　(5) 62

第貳部分：填充題(佔 76 分)

說明：第 A 題至第 S 題，將計算出來的答案劃記在答案卡上，每題全對得 4 分，其餘情況不給分。

A. 設 $P=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{5\times 6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2019\times 2020}$，

$Q=\dfrac{1}{1011\times 2020}+\dfrac{1}{1012\times 2019}+\dfrac{1}{1013\times 2018}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2020\times 1011}$，

求 $\dfrac{P}{Q}=\underline{\dfrac{\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}}{\boxed{13}}}$。(化簡成最簡分數)

B. 試求 $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ 之所有實根和為 $\underline{\boxed{14}}$。

C. 若 α,β,γ 為 $x^3+2x^2-3x-4=0$ 的三根，

求 $\left(\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma\right)\left(\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma\right)\left(\beta\gamma^2+\alpha\beta\gamma\right)=\underline{\boxed{15}\boxed{16}}$。

D. $f(x)$為實係數函數，已知所有實數x滿足$f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，

若$f(1)=2-\sqrt{3}$，則$f(2019)=\underline{\sqrt{\boxed{17}}}$。

E. 設x為所有實數且$x\neq n\cdot\dfrac{\pi}{2}$($n$為整數)，

求$f(x)=\left|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x\right|$之最小值為

$\underline{\boxed{18}\sqrt{\boxed{19}}+\boxed{20}\boxed{21}}$。

F. 若x,y,z,u,v為自然數，在$x+y+z+u^2+v^2=15$的條件下，u,v皆為偶數的

機率為$\dfrac{p}{q}$(p,q互質)，求$p+q=\underline{\boxed{22}\boxed{23}}$。

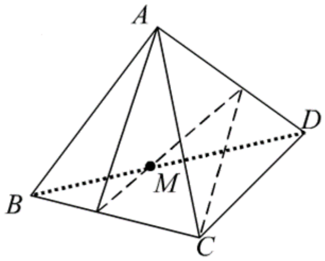
G. 令 $S=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{8}{6!+7!+8!}=\frac{p}{q}$，其中 p,q 互質，若 $p+q$ 為五位數，則此五位數的五個數字總和為 $\underline{\boxed{24}\boxed{25}}$。

H. 設 $Z^7=128$ 之七根在複數平面上，對應點依次為 $A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6$，則 $\frac{\overline{A_0A_1}}{2}\cdot\frac{\overline{A_0A_2}}{2}\cdot\frac{\overline{A_0A_3}}{2}\cdot\frac{\overline{A_0A_4}}{2}\cdot\frac{\overline{A_0A_5}}{2}\cdot\frac{\overline{A_0A_6}}{2}=\underline{\boxed{26}}$。

I. 已知 $f(x)=\log_2 x+2\log_2(12-x)$，求 $f(x)$ 的最大值為 $\underline{\boxed{27}}$。

J. 若 $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+9}+\sqrt{x^4-5x^2-10x+34}$，當 $x=k$ 時，有最小值 m，$k^2m=\underline{\boxed{28}\boxed{29}}$。

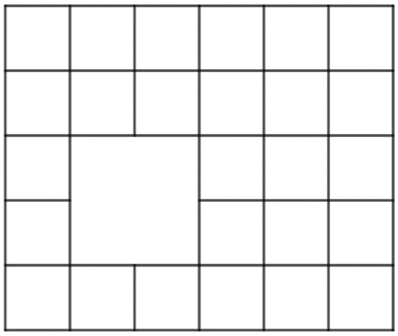
K. 有一個正四面體形狀的戒指盒，如右圖，其稜長為 5 公分，使用緞帶包裝且緞帶需由 A 經 $\overline{BC}$ 繞到 $\overline{BD}$ 中點 M，再經 $\overline{AD}$ 繞到 C 點，請問這條緞帶最短需為 $\underline{\boxed{30}\sqrt{\boxed{31}}}$ 公分。



L. 已知△ABC 為正三角形且面積為$147\sqrt{3}$，點 A，B，C 皆落在邊長為 16 之正六邊形的邊上，若點 A 將其所在的邊分成長度 $m:n$ 的兩段，其中 $m \le n$ 且 m, n 互質，求 $\dfrac{m}{m+n} = \underline{\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}}$ 。

M. P 為△ABC 內任一點，G_1, G_2, G_3 分別為△ABP，△BCP，△ACP 的重心，若△ABC 的中線長分別為 6，15，18，則△$G_1G_2G_3$ 面積為 $\underline{\sqrt{\boxed{34}\boxed{35}}}$ 。

N. 右圖中有 $\underline{\boxed{36}\boxed{37}\boxed{38}}$ 個矩形。



O. 已知不等式 $(x^2+y^2-3)(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-\frac{1}{3})\ldots(x^2+y^2-\frac{1}{3^{n-2}})\le 0$，$n$ 為自然數，在座標平面上，此不等式所表圖形面積為 S_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \underline{\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}\pi}$ 。

P. a,b,c 皆為實數，若 $a+b+c=3$，則 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2$ 之最小值為 $\underline{\boxed{41}\boxed{42}}$ 。

Q. 已知甲袋內有 2 個 10 元硬幣，乙袋內有 3 個 50 元硬幣，每次自各袋中任取 1 枚硬幣交換放入袋中(每袋硬幣取出的機率相同)，經長期交換後，甲袋內硬幣金額的期望值為 $\underline{\boxed{43}\boxed{44}}$ 。

R. 設 $A=\begin{bmatrix}\cos 102^\circ & -\sin 102^\circ \\ \sin 102^\circ & \cos 102^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin 363^\circ & \cos 363^\circ \\ -\cos 363^\circ & \sin 363^\circ\end{bmatrix}$，若正整數 n 滿足 $1\le n\le 50$ ，則使 $A^{2n}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的所有正整數 n 之總和為 $\underline{\boxed{45}\boxed{46}\boxed{47}}$ 。

S. 在△ABC 中，$\angle BAC=135^\circ$ ，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{BD}=3$ ，$\overline{CD}=2$ ，求△ABC 的面積為 $\underline{\dfrac{\boxed{48}}{\boxed{49}}}$ 。