

100 年陽明高中教師甄選數學考題 (2011.6.11)

★ 考試時間兩小時(早上 10:00~12:00)，共 55 位老師報名參加初試。

★ 填充題沒有照順序排列，且題目詳細敘述有些已經有點忘了，不過意思大概就是這樣囉!

一、填充題：(一題 7 分，共 70 分)

1.  $x, y, z$  為正實數，則  $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$  的最大值為?
2.  $y = \frac{\sin x}{\sqrt{5+4\cos x}}$ ， $0 \leq x \leq 2\pi$ ，則  $y$  的範圍為?
3.  $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$ ，求  $|x| - |y|$  的最小值為?
4. 一圓半徑為 2，過圓外一點  $P$  對圓作兩切線，切圓於  $A, B$  兩點，則  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的最小值為?
5. 一圓  $x^2 + y^2 + kx + 2y + k^2 = 0$ ， $P(1,2)$  可對圓作兩條切線，則  $k$  的範圍為?
6.  $f(x) = -kx^2 + (k+1)x + 1$ ，若  $-1 \leq x \leq 2$ ， $-4 \leq f(x) \leq \frac{17}{8}$ ，則  $k = ?$
7. 拋物線(方程式忘了 XD，好像是  $y^2 = 8x$  之類的)，一直線與此拋物線交於  $A, B$  兩點，且直線與拋物線所圍成的面積為定值  $\frac{2}{3}$ ，則  $A, B$  中點所形成的軌跡方程式為?
8. 拋物線  $x^2 = 4cy (c > 0)$ ，一條斜率為 1 的直線過焦點交此拋物線於  $A, B$  兩點，自  $A, B$  兩點對  $x$  軸作垂線於  $D, C$  兩點，已知四邊形  $ABCD$  面積為  $12\sqrt{2}$ ，則  $c = ?$
9. 有 20 節車廂，其中 5 節有廁所，規定每個廁所之間至少要間隔 2 個車廂，則車廂有幾種排列方法?
10. (怎麼想都只想出九題~還有一題忘了! 歡迎大家提供!)

二、證明題：(一題 10 分，共 30 分)

1. 已知三平面  $\begin{cases} E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ E_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$  皆不平行不重合，若  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ，證明三平面相交於同一條直線上，或是三平面兩兩相交、交線平行。
2.  $k \in \mathbb{N}$ ， $a_k$  為正實數，且  $a_k^2 \leq a_k - a_{k+1}$ ，證明  $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $a_n < \frac{1}{n}$ 。
3. 某個考試有  $n$  個人參加， $n$  為奇數，總共答對  $3n+1$  個題目，假設答對題數不超過 3 題者為不及格，答對題數不少於 6 題者為優秀，證明不及格人數比優秀人數多。