國立彰化女子高級中學 108 年第一次教師甄選 數學科 筆試 答案卷

考試時間：120 分鐘

第一部分：填充題 (每題 5 分，共 60 分：不用詳述計算過程，寫答即可，全對始計分)

1	2	3	4	5	6
1153	23	67.1875	5	168	$\frac{25}{2}(n^2+3n)$
7	8	9	10	11	12
10	6	$\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$	$\frac{31}{3}$	1	100000

第二部分：計算證明題 (每題 8 分，共 40 分)

1.略

2.略

3.(1)每個頂角相等、每個稜邊等長、每個面由正多邊形組成

(2)略

4.證明：$87<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\text{K}+\frac{1}{\sqrt{2019}}<89$

證明：Q $\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{2}{2\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$，$\therefore 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2019}\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{2020}-\sqrt{1})>2(44.5-1)=87$ 且 $1+\sum_{k=2}^{2019}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(\sqrt{2020}-\sqrt{1})<1+2(45-1)=89$

5.設 O 為正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 之中心，試證明：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$

證明：考慮正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 之外接圓的半徑為 r，則 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OA_2}|=\ldots=|\overrightarrow{OA_n}|=r$ 且圓心角 $\angle A_1OA_2=\ldots=\frac{2\pi}{n}$。

令 $k=|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}|=\ldots\Rightarrow \overrightarrow{OA_1}=\frac{r}{k}(\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2})$，$\overrightarrow{OA_2}=\frac{r}{k}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3})$，…，

$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\frac{2r}{k}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}) \Rightarrow (2r-k)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})=\overrightarrow{0}$

$\because k=|\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}|<|\overrightarrow{OA_n}|+|\overrightarrow{OA_2}|=2r \Rightarrow (2r-k)\neq 0$ 即 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$