國立彰化女子高級中學108年第一次教師甄選 數學科 筆試 試題

考試時間：120分鐘

第一部分：填充題 (每題5分，共60分：不用詳述計算過程，寫答即可，全對始計分)

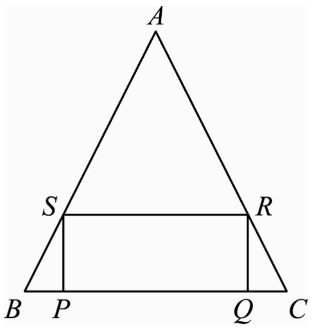
1.已知 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$，且 $x>1$，求x^8的整數部分為_______。

2. n為正整數，已知$2^2+2^n+2^{10}$為完全平方數，n的最大值與最小值之和為_______。

3、設有 A，B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有$\frac{2}{3}$公升的純酒精，B 瓶裝有$\frac{1}{3}$公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶(不考慮酒精與水混合後體積的縮小)。在第三輪操作後，A 瓶的溶液中有___________%的酒精。

4、設$0<\theta<\phi,\theta+\phi=45^\circ$，若$\cot\theta,\cot\phi$都是正整數，求$\cot\theta+\cot\phi$之值=___________。

5、如圖所示，$PQRS$為一給定的矩形，長$\overline{PQ}=14$，寬$\overline{QR}=6$，而ΔABC為等腰三角形，其中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$P, Q$在$\overline{BC}$邊上，$R, S$分別在$\overline{CA}, \overline{AB}$邊上，求$\Delta ABC$面積的最小值=___________。



6.將一枚均勻的硬幣丟擲 n 次，在丟擲過程中，正面第一次出現時可得獎金100元，正面第二次出現時可再得獎金200元，正面第三次出現時可再得獎金300元，以此類推。則丟擲 n 次的獎金期望值為_______元。(以 n 表示)

7、在空間直角坐標系中有一點$A(5,2\sqrt{6},7)$。xy 平面上有一圓 C，其圓心為原點 O、半徑為$\sqrt{2}$， P 為圓 C 上的點且向量$\overrightarrow{OA}$與向量$\overrightarrow{OP}$所圍三角形面積為整數，則這樣的 P 點有___________個。

8.函數$f(x)=x^2-\sqrt{2}x$與$g(x)=-x^2-1$的圖形有兩條公切線且可得到四個切點，則此四個切點組成的四邊形周長為_______。

9.計算 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-3k^2}}{4n^2}=$__________。

10.已知 $A(1\ ,3)$ 為橢圓 $\Gamma:\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ 內部一點，F 是橢圓 Γ 的左焦點且 P 在 Γ 上，則 $\overline{PA}+\frac{5}{3}\overline{PF}$ 的最小值為__________。

11、求極限值 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\times\int_0^x \sin(2t)\,dt\right]=$___________。

12.單位圓上有 10 個點將圓周等分，將此 10 點任兩點相連共可得 45 條線段，則這 45 條線段長度的乘積值為_______。

第二部分：計算證明題 (每題 8 分，共 40 分)

1.某師對 102 年指考甲的單選題作教學，題目為:「考慮所有由 1、2、3、4、5、6 各一個與三個 0 所排成形如 $\begin{bmatrix}0 & a & b\\ c & 0 & d\\ e & f & 0\end{bmatrix}$ 對角線均為 0 的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值 $\begin{vmatrix}0 & a & b\\ c & 0 & d\\ e & f & 0\end{vmatrix}$ 為奇數的機率為下列哪一個選項？

(A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{19}{20}$」三位學生的作法如下，皆為正確答案。

A 生：「$\frac{3!\times 3!\times 2}{6!}=\frac{1}{10}$」、B 生：「$\frac{C_3^3C_3^3}{C_3^6C_3^3\frac{1}{2!}}=\frac{1}{10}$」、C 生：「$\frac{C_3^3C_3^3\times 2}{C_3^6C_3^3}=\frac{1}{10}$」。

請解釋三個學生數學式中，每個符號的意義分別為何？並說明如果你是該師，會如何讓學生理解三個方法的不同之處。

2.設相異三平面 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，E_3：$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$ 兩兩相交於一直線且三交線互相平行，令 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$，請證明：$\Delta=0$ 且 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少一個不為 0。

3.(1)請說明滿足那些條件才能稱作「正 n 面體」。(3 分)

(2)證明：正 n 面體(柏拉圖多面體)的個數共有 5 個。(即 n = 4、6、8、12、20) (5 分)

4.證明：$87<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\mathrm{K}+\frac{1}{\sqrt{2019}}<89$

5.設 O 為正 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 之中心，試證明：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$

國立彰化女子高級中學108年第一次教師甄選 數學科 筆試 答案卷

考試時間：120分鐘

第一部分：填充題 (每題5分，共60分：不用詳述計算過程，寫答即可，全對始計分)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12

第二部分：計算證明題 (每題8分，共40分)

1.

2.證明:

3.(1)

(2)證明：

4.證明：

5.證明: