一. 填充題 16 題 每題 5 分 共 80 分

不需要計算過程，只要標註題號即可

1. 直線 $L_1:2x+y-6=0$，$L_2:8x+9y=6$，L_1 上的點經由二階方陣 A 的線性變換至 L_2，L_2 上的點經由二階方陣 A 的線性變換至 L_1，試求二階方陣 A=________。

2. 已知直角三角形的斜邊長與其中一股長之和為 9，則此直角三角形面積的最大值為______

3. 設 ΔABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c，且 a,b,c 三數成等差，若 $a=20$ 且 $b\cos B=c\cos C$，則 ΔABC 的內切圓面積為______。

4. 考慮每項都由 0 或 1 所形成項數為 25 的數列中，首項與末項都是 0，且此數列的各項中，沒有兩個連續的項為 0，也沒有三個連續的項為 1，試問滿足上述條件的數列總共有___個

5. 方程式 $(x+7)^{\frac{1}{3}}-(x-7)^{\frac{1}{3}}=2$，則解方程式得實根中較小者為________

6. 設正實數 x、y 滿足方程式 $\log\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\log x+\log y$，則數對 $(x,y)=$____________。

7. 將 12 張椅子排成一列，甲乙丙丁四個人坐椅子，且兩兩不相鄰，若第七個椅子一定要有人坐，則坐法有____________種。

8. A袋有一紅一白球，B袋有一白球，若從A袋中任選一球丟入B袋，再從B袋中任選一球丟入A袋，這樣稱做一局，則四局後紅球在B袋的機率為____________。

9. 實係數二次方程式$x^2-ax+b=0$的二實根α、β滿足$-1\le\alpha\le 0$，$1\le\beta\le 2$，則a^2+b^2的最小值為____________。

10. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2n}\right)^p+\left(\frac{2}{2n}\right)^p+\cdots\cdots+\left(\frac{2n}{2n}\right)^p}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^p+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}\right)^p+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2n}\right)^p}$之值$(p>0)$____________。

11. 平面上有一橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$和一個頂點在$(0,0)$開口向右的拋物線。這兩個圖形相交於兩點 P、Q 且 P、Q 都在$x=4$上，求此拋物線的正焦弦長為__________。

12. 已知圓周上有二十四個等分點，任取三點所組成的三角形中，三個內角均大於 30 度的有__________個

13. 設 a 為實數，多項式函數 $f(x)=2x^5+20a^3x^2+2430x+a^2$ 在整個實數上為遞增函數，則實數 a 的範圍為________。

14. 有一棟摩天大樓有n階台階，上樓時一步可走一個台階，也可走兩個台階，所有不同的上樓方法數記為a_n，求 a_{2019} 被 7 除的餘數為________

15. 求$\left[\left(2+\sqrt{6}\right)^{100}\right]$的個位數為______________。 [ ]：為高斯符號

16. 設 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ，且滿足

(1) $f(1)=\dfrac{3}{2}$

(2) $\forall x\in\mathbb{N}$，$f(x+1)=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot f(x)+\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\cdot f(1)+x^2+2x$，

則 $f(40)=$______________。

二、 計算題 2 題，每題 10 分，共 20 分

1. 若 P 為直角坐標平面上一點，O 為原點，且 $A(2,0)$、$B(0,-2)$、$\overline{OP}=2$，則
   (1)求 $\overline{PA}^2\times\overline{PB}^2$ 的最大值
   (2)若 P 點落在 x 軸上方，求 $\overline{PA}+3\sqrt{2}\,\overline{PB}$ 的最大值

2. 函數 $f(x)=\sqrt{40-x}+\sqrt{x}+\sqrt{13-x}$，其中 $0\le x\le 13$，
   (1) $f(x)$的最大值為何？此時，x 為何值？
   (2) $f(x)$的最小值為何？此時，x 為何值？