臺中市立臺中第二高級中等學校108學年度第一次教師甄選

數學科題目卷

（本題目卷於考試結束後，一併繳回）

一、填充題：10題共50分

1. 設$[x]$表示不大於x的最大整數，則$\displaystyle\sum_{n=2}^{2056}\left[\frac{1}{(\log_n 2n)-1}\right]=$__________

2. 設$k\in$□ ，若$x^2+y^2=2k^2$與$xy=4k$的圖形不相交，則$k=$__________

3. $\left[\dfrac{10^{63}}{10^{21}+3}\right]$的末兩位數字為 ______（先寫十位數字，後寫個位數字，其中$[\ ]$表示高斯符號）

4. 在複數平面上，已知直角ΔABC的三頂點A,B,C對應的複數依次是z,z^2,z^3且$|z|=2,\angle BAC=90^0$，則$z=$______

5. 在ΔABC中，h_a,h_b,h_c分別為通過A,B,C三頂點的高，已知$\tan A=1$，$\tan B=2$，求$\dfrac{abc}{h_a h_b h_c}=$__________

6. 重複擲一公正骰子，直到有一種點數出現3次後就停止。將到結束為止出現的全部點數之和作為總得分。例如：依次出現的點數為$2,4,5,2,1,2$，則結束時得16分。試求在結束時總得分為10分的條件下，最後一次擲出1點的機率為__________

7. 試求下列級數的和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}=$__________

8. 若三次多項式$x^3+3x-2=0$的根為a,b,c，求以$(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$為根且領導係數為1的最低次數多項式__________

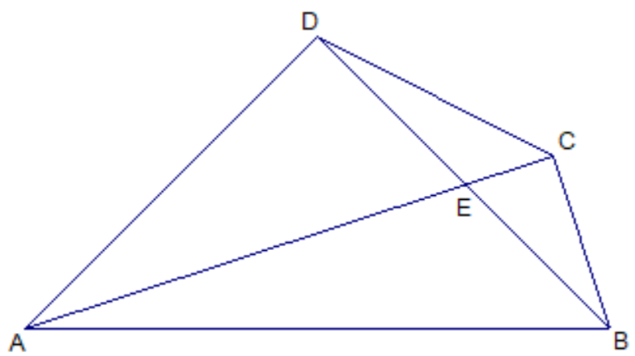
9. 實數 x, y, z, t 滿足 $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z^2+t^2=25 \\ xt-yz=20 \end{cases}$，則求 $x\cdot z$ 的最大值＝_______

10. 空間中 $O(0,0,0)$，$\overrightarrow{OA}=(1,3,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,-1,0)$，

若實數 x 、 y 使得 $\left|\overrightarrow{OA}-x\overrightarrow{OB}-y\overrightarrow{OC}\right|$ 有最小值 m，求序組 (x,y,m)＝_________

二、計算證明題：5 題共 50 分(請依題號順序書寫計算過程)

1. 如圖所示，四邊形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 E 點，且 $\overline{BE}=\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=3$，若 $\angle ADB=90°$，$\angle ACD=45°$，則 ΔBCD 的面積為何？



2. 已知 $a,b\in R$，試討論方程式 $x^3+ax+b=0$ 僅有一實根(不含重根)的條件

3. 設 a,b,c 是閉區間 $[0,1]$ 上的三個實數，且 $f(x)=\dfrac{|x-a|+|x-b|+|x-c|}{3}$，試證明：可以在閉區間 $[0,1]$ 上找到實數 x_0 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$

4. 證明：$n\in\mathbb{N}$，$1+\dfrac{2}{3n-2}\le\sqrt[n]{3}\le 1+\dfrac{2}{n}$

5. 設某三角形三邊長成等差數列，公差為 d，若 r 、 R 分別表示此三角形之內切圓與外接圓之半徑，試證：公差 $d=\sqrt{2Rr-4r^2}$