108 年麗山高中教師甄選試題

一、填充題(每題 4 分，共 72 分)

1. 5 座島利用 4 條通道讓 5 座島相通之方法數。
2. $y=x^6-10x^5+29x^4+\square x^3+ax^2$ 與直線 $y=bx+c$ 有三個切點，求切點 x 坐標總和。
3. $f(x)=\dfrac{6\log_{\sqrt{2}}x-8}{1+4(\log_2 x)^2}$ 有最大值時，求此時 x 值。
4. 從 $\{2,2^2,\ldots\ldots,2^{25}\}$ 取兩個相異 a,b，求 $\log_a b$ 為整數的機率。
5. 求 $\sum\limits_{k=1}^{2n}|x-3^k|$ 的最小值。
6. 圓內接四邊形 $ABCD$ 圓心為 O，$\angle ABC=90^\circ$ $\angle BCD=75^\circ$ $\angle BDC=45^\circ$，若向量 $\overrightarrow{BD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，求 α,β。
7. $9x^2+4y^2=36$ 上一點 P 到直線 $3x+4y=24$ 之距離有最大值時，求 P 點坐標。
8. 擲一顆骰子六面 $1,1,1,2,2,3$，P_n 為前 n 次點數和為偶數的機率，求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$。
9. 求級數 $\sum\limits_{n=1}^{2017}\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$。
10. 通過 $(p,4)$ 之直線與曲線 $f(x)=x^3-3x^2+4$ 相切恰只有一條，求 p 之範圍。
11. $x,y\in R$，$x+y=x^2+y^2$，若 x^4-y^4 有最大值 M，此時 $x+y=n$，求數對 (n,M)。
12. 在 $O(0,0)$ 與 $A(\frac{1}{2},0)$ 作 $2n$ 等分，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sqrt{1-(\dfrac{k}{2n})^2}$。
13. α,β 為 $x^2-x+1=0$ 之兩根，若 $\alpha+\beta=\alpha^n+\beta^n$，$1\le n\le 100$，求滿足式子的自然數 n 有幾個。
14. 在空間中，$A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,4)$，P 為平面 $E:x+y+z=0$ 上的動點，求 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 的最小值。
15. $n\in Z$，若 $\dfrac{n^3+108}{n+11}$ 為整數，求 n 之最大值。
16. 求 $\int_1^7(-2+\sqrt{-x^2+6x+7})dx$。
17. 給圖形，求某段長度。
18. 等腰三角形頂角為銳角 ϕ，若外接圓半徑 R 與內切圓半徑 r 的的比值 $\dfrac{R}{r}=1+\sqrt{2}$，求 $\sin\dfrac{\phi}{2}$。

二、 計算題

1. 正方體 $ABCD-EFGH$ ，內部一點 P 滿足 $\overline{PA}=\sqrt{2}$ 、 $\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{3}$ 、 $\overline{PE}=1$，求正方體體積。……(8 分)

2. $f,g: diff.$ 且 $f(x+2y)=f(x)+g(y)$
   (1) $prove \quad f'(x)$ 為一個定值。……(4 分)
   (2)若 $f(0)=1$、 $f'(0)=1$，求 $g(5)$ 。……(4 分)

3. 情境素養設計題。(題庫收集大全)……(12 分)