

一、填充題

- $x^2 + (k+3)x + (2k+3) = 0$ 為一整係數方程式，此方程式有一正根一負根，若正根的絕對值小於負根的絕對值，則正根為多少？
- 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人搭三艘不同的船，每船限乘 5 人，至少每船載 1 人，若甲乙必定同船，則有多少種搭船方法？
- 求 $(\sqrt{x} + 1)\sin x = 4$ 在 $[0, 20\pi]$ 的實根個數
- $0 \leq x \leq 2\pi$ ，假設 $A = \begin{bmatrix} \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ ， $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，求滿足 $a_5 d_5 = b_5 c_5$ 相異實數解的和
- $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AC} = 4$ ， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， P 為 $\triangle BIC$ 內一點，設 $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，求 $\alpha + \beta$ 的最小值
- $0 \leq x \leq 2\pi$ ， $f(x) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ ，在 $x = \alpha$ 時有最大值，在 $x = \beta$ 時有最小值，則數對 (α, β) 為？
- $a \in \mathbb{R}$ ，若 $x^3 - (a^2 - 2a - 2)x - 2a^2 - 2a = 0$ 有三個整數根，求 a 可能的值
- 若 z 、 $(1+i)z$ 、 $2\bar{z}$ 在複數平面上分別為 P 、 Q 、 R ，其中 $P(z) = \cos\theta + i\sin\theta$ ，若以 P 、 Q 、 R 三點所產生的平行四邊形另外一個頂點為 S ，則 S 與原點距離的最大值
- $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 為邊長 1 的正立方體， P 、 Q 、 R 為 \overline{AB} 、 \overline{AD} 、 $\overline{AA_1}$ 的中點，以 $\triangle PQR$ 為底的一個直三角柱，此直三角柱另一面也在正立方體的表面上，求此直三角柱的體積
- 四面體 $O - ABC$ ， $\overline{OA} = 1$ 、 $\overline{OB} = 2$ 、 $\overline{OC} = 3$ ， $\angle ABC$ 與 $\angle BCA$ 皆為銳角，且 $\angle AOB = 10^\circ$ 、 $\angle BOC = 50^\circ$ ，平面 ABO 與平面 BOC 夾 70° ，求此四面體體積

二、計算題

11. $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 對應的邊分別為 a 、 b 、 c 。設 $\vec{u} = (\sin A, b+c)$ 、 $\vec{v} = (\sin C - \sin B, a-b)$ ，且 $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ，

(A) $\cos C$ 為？

(B) 若 $a+b = kc$ ，則 k 的範圍為？

12. $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 有三個相異實根， $f(x)$ 在 $x < 0$ 時，嚴格遞減，在 $0 < x < 1$ 時，嚴格遞增，且 1 為 $f(x)$ 的一個根

(A) 求 $f(2)$ 的範圍

(B) 以 a 值討論 $f(x)$ 與 $y = x - 1$ 交點數

13.
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = (1 + \frac{1}{n-1})a_{n-1} + \frac{n}{2^{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$$

(A) 求 a_n 的一般項

(B) 若 S_n 為前 n 項和，則 S_{11} 為？

14. $\Gamma: 5x^2 + 14xy + 13y^2 = 8$ ， Γ' 是將 Γ 以 x 座標推移 y 座標 2 倍，再逆時針旋轉 45°

(A) Γ' 的方程式為？

(B) 求 Γ 到 $x + 3y = 10$ 距離的最小值

15. 有 20 顆編號 1 到 20 號的球，取後放回， P_n 表示第 1 次到第 n 次總和為 3 的倍數的機率

(A) P_n 為？(以 n 表示)

(B) 若 $|P_n - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n| < 10^{-8}$ ， n 的最小值為？