國立新竹高級中學108學年度第一學期第1次教師甄選初試試題

一、第一部分 (每題5分)

1. 已知關於 x 的整係數方程式 $x^2+(k+3)x+(2k+3)=0$ 有一正根和一負根，且正根的絕對值小於負根的絕對值，則此方程式的正根為______。

2. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚等7人欲搭乘3艘不同的小船渡河，若每艘小船最多可載乘客5人，每船都至少載客1人且甲、乙兩人必須同船，則此7人有______種安全乘船的渡河方式？

3. 求方程式 $(\sqrt{x}+1)\sin x=4$ 在區間 $[0,20\pi]$ 的實根個數為______。

4. 已知 $0<x<2\pi$，$A=\begin{bmatrix}\cos x & \cos x\\ \cos x & \sin x\end{bmatrix}$，$A^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$，則滿足 $a_5d_5=b_5c_5$ 之所有相異實數解的和為______。

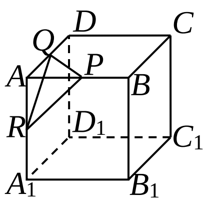
5. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=5$，I 為 ΔABC 的內心，P 為 ΔIBC (包括邊界)內的一點，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\ (\alpha,\beta\in R)$，則 $\alpha+\beta$ 的最小值為______。

6. 設 $f(x)=5\sin(\dfrac{\pi}{3}x)-3\sin(\dfrac{\pi}{5}x)$，當 $x>0$ 時若 $f(x)$ 的最大值為 α，發生最大值時的最小實數 $x=\beta$，則數對 $(\alpha,\beta)=$______。

7. 設 a 為實數，若三次方程式 $x^3+(-a^2+2a+2)x-2a^2-2a=0$ 的三個根都是整數，則 a 值可能為______。

8. 設複數 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0\le\theta\le\pi)$，複數 z、$(1+i)z$、$2\bar{z}$ 在複數平面上對應的三個點分別是 P,Q,R，當 P,Q,R 不共線時，以線段 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 為兩邊所形成的平行四邊形的第四個頂點為 S，則點 S 到原點距離的最大值為______。

9. 如圖，在邊長為1的正立方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P,Q,R 分別為 $\overline{AB},\overline{AD},\overline{AA_1}$ 的中點，以 ΔPQR 為底面做一個直三角柱，使其另一個底面的三個頂點也都在正立方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上，則這個直三角柱的體積為______。



10. 四面體 $OABC$，$\overline{OA}=1,\overline{OB}=2,\overline{OC}=3$，$\angle AOB=10^\circ$，$\angle BOC=50^\circ$，$\Delta AOB$ 和 ΔBOC 兩面角為 70°，求四面體 $OABC$ 體積______。

第二部分：(每題10分，作答時請標示題號)

1. 設 ΔABC 的內角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c，若向量 $\vec{u}=(\sin A,b+c)$, $\vec{v}=(\sin C-\sin B,a-b)$，且存在實數 λ 使得 $\vec{u}=\lambda\vec{v}$。

   (1)求 $\angle C$。(4分)

(2)若 $a+b=kc$，求實數 k 的範圍。(6 分)

2. 設 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，當 $x<0$ 時 $f(x)$ 為嚴格遞減函數，$0<x<1$ 時 $f(x)$ 為嚴格遞增函數，且 $f(x)=0$ 有三個實根，1 為其中一個實根。
(1)求 $f(2)$ 的範圍。(4 分)
(2)試就 a 值討論直線 L： $y=x-1$ 與曲線 $y=f(x)$ 交點的個數。(6 分)

3. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式如下：

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=(1+\dfrac{1}{n-1})a_{n-1}+\dfrac{n}{2^{n-1}}(n\geq 2, n\in N) \end{cases}$$

(1)求數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般式(以 n 表示)。(5 分)

(2)若數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n，則 $S_{11}=$？(5 分)

4. 在坐標平面上，將 Γ：$5x^2+14xy+13y^2=8$ 之圖形沿著 x 軸推移 y 坐標之 2 倍後，再以原點為中心逆時針旋轉 45° 得新圖形 Γ'，求
(1) Γ' 之方程式。(6 分)
(2)若 $P(x,y)\in\Gamma$，求 P 到 L： $3x+y=10$ 的最短距離。(4 分)

5. 不透明箱內有編號分別為 1 至 20 的二十個球，每次隨機取出一個球，每球取到的機率都相同，記錄其編號後放回箱內；將前 n 次取球編號之總和為 3 的倍數的機率以 P_n 表示。
(1)試求 P_n (以 n 表示)。(6 分)
(2)試求滿足 $\left|P_n-\lim\limits_{n\to\infty}P_n\right|<10^{-8}$ 的最小自然數 n。(4 分)