

國立台灣師範大學數學系

106 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題(共兩頁)，合計 100 分。
- (乙) 作答時間 120 分鐘(下午 1:20 ~ 3:20)。
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、坐標平面上， $\triangle OAB$ 為直角三角形，其中 O 為原點， $\angle A$ 為直角，且 $\overline{AB} = 2\overline{OA}$ 。已知 $A(3,4)$ ，且 B 的 y 座標為正數。

1. 試求向量 \overrightarrow{AB} 。
2. 若拋物線 $y = ax^2 + 1$ 上有兩相異點關於直線 OB 對稱，試求 a 的範圍。

二、設 n 為正整數。令 $p(n)$ ， $q(n)$ 分別表示 n 的各位數字的和與乘積。例如 $p(9527) = 9 + 5 + 2 + 7 = 23$ ， $q(9527) = 9 \times 5 \times 2 \times 7 = 630$ 。

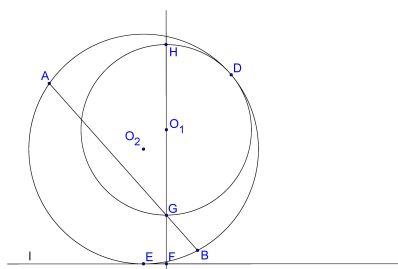
1. 已知 $p(n) = 4n - 42$ 。試求 n 的所有可能的值。
2. 已知 $q(n) = n^2 - 9n - 49$ 。試求 n 的所有可能的值。

三、已知數列 $\langle a_n \rangle$ 各項皆為正數， $a_1 = 1$ ，且 $n \geq 2$ 時滿足

$$a_{n-1} - a_n = a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1})$$

試求 a_n 的一般項公式。

四、如圖，已知圓 O_2 與圓 O_1 內切於點 D ，且直線 l 與 O_2 切於點 E 。過 O_1 作 l 的垂線，交 l 於 F ，且交 O_1 於點 H, G 。過 G 任作 O_2 的一弦 AB (此弦不在直線 GH 上)。



1. 證明 E, G, D 三點共線。
2. 試證 A, F, B, H 四點共圓。

五、設複數 z_1, z_2, z_3 為實係數多項式 $P(z) = z^3 + qz + r$ 的三個根，且滿足

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 100.$$

已知在複數平面上， z_1, z_2, z_3 所對應的三個點恰為一直角三角形的三頂點。試求此直角三角形的斜邊長。