

臺北市立成淵高級中學一百學年度教師甄試 數學科試題

試題說明：本試題分成三部分。

第一部分為第 1 題到第 12 題，為填充題，每題 5 分；

第二部分為第 13 題與第 14 題，為證明題，每題 10 分；

第三部分為第 15 題與第 16 題，為批改作業題，每題 10 分，請依據題後所給的學生解法說明是否有謬誤，若學生解法沒有錯，直接在答案卷的題號後註寫“本題正確”；若有謬誤，請指出謬誤何在，並給予正確解答。

請注意：第一部分請自行在答案卷上依序編號作答；第二部分與第三部分，可不依序作答，但書寫每題時須註明該題題號。

第一部分：填充題(每題 5 分)。請自行在答案卷上編號作答

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right] =$ _____。
2. 若直線 $y = 3x + a$ 與曲線 $y = x^3 + 2$ 有三相異交點，則 a 的範圍為 _____。
3. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^{20} =$ _____。
4. 已知拋物線 Γ 與直線 $2y + 3 = 0$ 相切，且 Γ 的對稱軸方程式為 $2x + y = 1$ ，準線方程式為 $x = 2y + 5$ ，則 Γ 的方程式為 _____。
5. 池塘中有一隻青蛙在六塊石頭 A,B,C,D,E,F 上跳來跳去，每次由所在位置的石頭跳到另一塊石頭，若 a_n 表示青蛙由石頭 A 出發，跳了 n 次後回到石頭 A 的方法數， $a_6 =$ _____。
6. 一袋中有十顆球，編號分別為 1,2,3,...,10 的球各一顆。今自袋中隨機一次取出兩球，則所得號數乘積的期望值為 _____。
7. 方程式 $\cos \pi x = \frac{x}{4}$ 的實根有 _____ 個。
8. 已知 z 為非零複數，且 $z^5 = \bar{z}$ ，則在複數平面上，以滿足前述要求的 z 為頂點所成之多邊形的面積為 _____。
9. 已知 a, b, c 為正數且 $a + b + c = 1$ ，則 $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)$ 的最小值為 _____。
10. 因式分解 $a^{10} + a^5 + 1 =$ _____。(答案為兩個有理式的乘積)
11. 若 $\begin{cases} x + \log x = 100 \\ y + 10^y = 100 \end{cases}$ ，則 $x + y =$ _____。
12. 設 $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$ ，其中 n, a_n, b_n 皆為正整數，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$ _____。

第二部分：證明題(每題 10 分)

13. 以銳角 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{BC} 為直徑作一圓，分別交另兩邊 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 D, E 兩點，求證： $\overline{DE} = \overline{BC} \cdot \cos A$ 。

14. 已知平面 E 上有不共線的三點 A 、 B 、 Q ，而平面 E 外有一點 P ，若直線 PQ 與 E 垂直，且 $\angle PAQ$ 、 $\angle QAB$ 、 $\angle PAB$ 皆為銳角，求證： $\cos\angle PAQ \cdot \cos\angle QAB = \cos\angle PAB$ 。

第三部分：批改作業題(每題 10 分)。請依據題後所給的學生解法說明是否有謬誤，若學生解法沒有錯，直接在答案卷的題號後註寫“本題正確”；若有謬誤，請指出謬誤何在，並給予正確解答。

15. 求函數 $y = 2x + \sqrt{2x-1}$ 的最小值。

(學生解法) 由 $y - 2x = \sqrt{2x-1}$ ，兩邊平方得 $(y - 2x)^2 = 2x - 1$ 或 $4x^2 - 2(2y+1)x + (y^2 + 1) = 0$ ， $\because x \in \mathbb{R}$ ，
 \therefore 判別式 $(2y+1)^2 - 4(y^2 + 1) \geq 0$ ，故 $y \geq 0.75$ ，即 y 的最小值為 0.75

16. 若對四組資料 $(1,2)$ 、 $(2,m)$ 、 $(4,n)$ 、 $(5,5)$ 以最小平方方法所求得之 y 對 x 的迴歸直線為 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ，求數對 (m,n) 。

(學生解法) $\because \bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{3}{2}$ 又 $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{m+n+7}{4}$ ， $\therefore m+n=5$ ， \therefore 直線方程式為 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 之誤差平方和為

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(5 - m - \frac{7}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 2(m-2)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

故當 $m=2, n=3$ 時，此平方和最小，即數對 $(m,n) = (2,3)$ 。