105 學年度第二學期第一次定期考高三數甲試題

第壹部分：選擇題(佔 48 分)

一、單選題（佔 24 分） 說明：第 1 題至第 4 題為單一選擇題，每題答對得 6 分；答錯或未答者，該題以零分計算

1. 某日數學課，老師請五位同學分別說明函數極限的相關性質，其中 $f(x)$ 為定義域閉區間 $[0,5]$ 的實數值函數。試問下列選項中哪一個同學的說法是正確的?

(1)小雄:若 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=3$ ，則 $f(1)=3$

(2)小瑛:若 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ，則 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 不一定存在

(3)小君:若 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續

(4)小清:若 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ ，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續

(5)小胖:若 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=3$ 且 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ 極限值存在，則 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=3$

2. 設 $f(x)=\begin{cases}2x-3 & ,\ -1\le x<1\\ x^2-\pi & ,\ 1\le x<2\\ x+1 & ,2\le x<3\end{cases}$ ，且對所有實數 x 皆具有 $f(x)=f(x+4)$ 的性質，請問 $f(106)+f(\sqrt{\pi})+f(-2017)$ 的值為下列哪一個選項?

(1) $-\pi$　(2) -2　(3) 0　(4) 2　(5) π

3. 試問下列有關極限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left|11-3x-x^3\right|-3}{x-2}$ 的敘述何者正確？

(1) 極限不存在　(2) 極限為 1　(3) 極限為 15　(4) 極限為 20

(5) 極限為 25

4. 設無窮等比級數$7+\frac{7}{8}+\frac{7}{8^2}+\cdots+\frac{7}{8^{n-1}}+\cdots$之和為$S$，且其前$n$項之和為$S_n$。

若$|S-S_n|<\frac{1}{10^6}$，則n的最小值為下列哪一個選項? (已知$\log 2\approx 0.3010$)

(1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8

二、多選題（佔 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題至少有一個是正確的選項。全部答案均答對者，得 8 分；答錯一個選項者，得 4 分；答錯兩個選項者，得 2 分；錯三個(含)以上或全部選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{7}{8})^n=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2}=2$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{5^n+7^n}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}=2$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}-n)=0$

6. 設三個函數定義如下：

$f(x)=x^2+2x+4$，$g(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$，$h(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ 12, & x=2\end{cases}$。請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=12=f(2)$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=12=g(2)$ (3) $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=12=h(2)$

(4) 若$g(1)=7, g(3)=19$，則在 1 與 3 之間必存在一個實數x，使得$g(x)=12$

(5) $h(x)$為連續函數

7. 設$<a_n>$、$<b_n>$與$<c_n>$皆為實數數列，請選出正確的選項。

(1) 若對所有的正整數n，$a_n\le c_n\le b_n$恆成立，且$<a_n>$與$<b_n>$均為收斂數列，則$<c_n>$必為收斂數列

(2) 若數列$<a_n+b_n>$與數列$<a_n-b_n>$皆為收斂數列，則數列$<a_n>$必為收斂數列

(3) 若$< a_n >$為一收斂數列，且任意正整數n，$a_n \neq 0$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}$也是收斂數列

(4) $< a_n >$是一個無窮數列，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(5) 設$< a_n >$及$< b_n >$都是收斂數列，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$且對一切自然數$n$恆有$a_n < b_n$ ，則$\alpha < \beta$

第貳部份 ：填充題 (佔 42 分)

說明：每題答對得 7 分。答錯不倒扣，未完全答對該題不給分。

1. $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=8+2x-x^2$，已知合成函數 $f\circ g$ 的值域為 $\{y \mid a \le y \le b, y \in R\}$，求數對 (a,b) 之值為_______。

2. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}-\dfrac{2x^2}{3x^2+2x-5}\right)$ 之值為____________。

3. 若 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，則 $f(3)=$____________ 。

4. 已知 $< a_n >$、$< b_n >$為兩個公差皆不為 0 的等差數列且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=5$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{nb_{2n}}$ 之值為_______。

5. 若對所有的正整數 n，無窮數列$\left\langle\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^n\right\rangle$為一個收斂數列，則實數 x 的範圍為____________。

6. 對所有的正整數 n，若數列 $< a_n >$的前 n 項之和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=5n^2$ 恆成立，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$ 之值為_______。

第叁部份 ： 計算證明題(佔 10 分)說明:請詳列過程或理由,否則不予計分。

假設一個實數數列$< a_n >$，對所有的正整數n，$a_n = na^n$恆成立，$0 < |a| < \frac{1}{2}$。

(1)試用a,n表示$\frac{a_{n+1}}{a_n}$之值。(2 分)

(2)利用數學歸納法證明: 對所有的正整數n，$|a_n| \le 2^{n-1}|a|^n$恆成立。(6 分)

(3)計算$\lim_{n\to\infty} a_n$之值。(2 分)