105 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

99362403-25

第壹部分：選擇題（占 60 分）

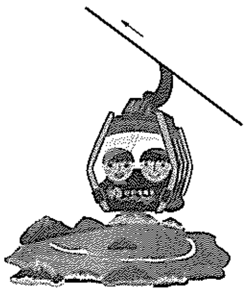
一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 阿明老師帶著全班 34 個同學參觀美術館(含老師共計 35 人)。已知美術館門票一張 100 元，而且，如果一次買 20 張可以打 9 折，一次買 30 張可以打 8 折，一次買 40 張可以打 7 折。請問阿明老師至少要付多少費用，才可以讓全班(含老師)都進去參觀？

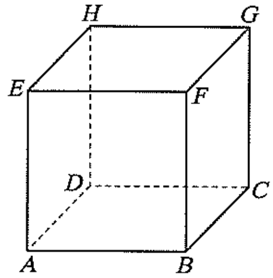
(1) 3500 元
(2) 3300 元
(3) 2900 元
(4) 2800 元
(5) 2600 元

2. 已知「引擎馬力 P(Horsepower)」的計算公式是 $P=\frac{1}{75}|\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}|$，其中 $\overrightarrow{F}$ 是引擎所拉動之物體的重量，單位是公斤，$\overrightarrow{v}$ 是引擎拉動之物體的速度，單位是公尺／秒。已知日月潭纜車有一引擎拉動軌道上重 1000 公斤的纜車廂，而纜線與水平線的夾角是約為 37°，纜車廂的速度是 5 公尺／秒，則此引擎約為多少馬力？$\left(\text{已知 } \sin 37°=\frac{3}{5}\right)$



(1) 30 馬力
(2) 40 馬力
(3) 50 馬力
(4) 60 馬力
(5) 70 馬力

3. 已知 $ABCD-EFGH$ 為空間中的一個正六面體，則下列哪一個選項的值最大？



(1) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}|$

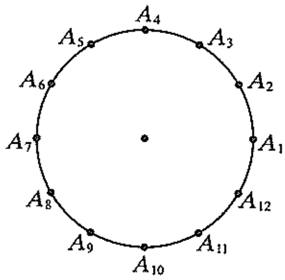
(2) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

(3) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

(4) $|\overrightarrow{CE}\times\overrightarrow{AB}|$

(5) $|\overrightarrow{EB}\times\overrightarrow{EG}|$

4. 已知一圓周上有 12 個等分點，從這 12 個等分點中，任意選 4 個等分點作為頂點構成一個四邊形，試問此四邊形為梯形的機率為何？



(1) $\dfrac{21}{55}$

(2) $\dfrac{56}{165}$

(3) $\dfrac{14}{55}$

(4) $\dfrac{8}{33}$

(5) $\dfrac{12}{55}$

5. 已知平面上三點 $A(6,2)$、$B(0,-1)$、$C(8,-5)$，阿明想要在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 上分別取 D、E 兩點使得直線 DE 可以平分 $\triangle ABC$ 的面積。已知阿明選取的 D 點的坐標為 $D(4,1)$，則直線 DE 的斜率應為多少？

(1) $-\dfrac{5}{2}$

(2) $-\dfrac{7}{3}$

(3) $-\dfrac{9}{4}$

(4) $-\dfrac{14}{5}$

(5) $-\dfrac{7}{6}$

6. 阿明老師的班上有 30 位同學，因同學於運動會期間為班級榮譽團結一致，老師特別製作 30 張彩券進行摸彩，以作為給同學的獎勵。已知其中 10 張有獎，其餘 20 張沒有獎，試問下列敘述哪一個選項正確？
(1)「班花」阿美吵著第一個抽，她認為第一個中獎的機會最大
(2)承(1)，在阿美沒抽中的情況下，接著「班長」阿勇第二個抽，他心中暗喜，因為他認為中獎的機會提高了
(3)承(2)，在阿勇抽中的情況下，第三個抽的「康樂」阿幸心想：第一個沒中，第二個中了，互相抵消，所以我的中獎機率跟阿美抽的時候相同
(4)承(3)，在阿幸沒抽中的情況下，第四個抽的「學藝」阿智，掐指一算，大聲說：現在我的中獎機率比阿勇抽的時候還要高
(5)小瓜被排在最後一個抽，他向老師抗議不公平，因為他認為最後一個抽的人，一定是抽到沒有獎的彩券

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 為實係數三次多項式，則下列敘述哪些正確？
(1)集合 $\{x \mid x<1，2<x<3，x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)<0$ 之解
(2)集合 $\{x \mid x>1，x\neq 2，x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)>0$ 之解
(3)集合 $\{x \mid x<3，x\neq 1，x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)<0$ 之解
(4)集合 $\{x \mid 1<x<3，x\neq 2，x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)>0$ 之解
(5)不等式 $f(x)<0$ 之解可能為所有的實數

8. 所謂圓錐曲線的「標準式」是指當圓錐曲線的對稱軸平行或垂直坐標平面上坐標軸的條件下所得到的方程式。當下列選項中的訊息作為已知條件時，哪些可以在坐標平面上求出相關圓錐曲線的標準式？

(1)已知橢圓的兩個頂點及一個焦點的坐標
(2)已知雙曲線的兩個焦點及圖形上一個點的坐標
(3)已知拋物線的準線方程式及頂點的坐標
(4)已知橢圓的三個頂點
(5)已知雙曲線的兩條漸近線方程式

9. 阿明教授的生物實驗室內有一個容器正在培養 A、B 兩種細菌，並且在任何時刻下 A、B 兩種細菌的個數乘積必須保持為一定值的平衡狀態，已知該定值為 10^{12}。假設 n_A 表示 A 細菌的個數，n_B 表示 B 細菌的個數，$L_A=\log n_A$，$L_B=\log n_B$，試問下列選項哪些正確？

(1) $1\leq L_A\leq 12$
(2)當 $L_A=6$ 時，A 與 B 兩種細菌個數相同
(3)若今天的 L_A 值比昨天增加 1，表示今天的 A 細菌個數是昨天的 2 倍
(4)若星期一測得 L_A 值為 4 且星期三測得 L_A 值為 8，則可得星期二的 L_A 值為 6
(5)若阿明教授將 A 細菌個數控制在 300 萬個，則此時 $5.5\leq L_B\leq 6$

10. 已知有一個六個面的點數分別為 1、2、3、4、5、6 的公正骰子，投擲此骰子 5 次，紀錄每次投擲所出現的點數，依序為 a、b、c、d、e，則下列敘述哪些正確？

(1)符合 $a<b<c<d<e$ 的情形總共有 6 種
(2)符合 $a\leq b\leq c\leq d\leq e$ 的情形總共有 252 種
(3)符合 $a<b<c<d\leq e$ 的情形總共有 21 種
(4) a、b、c、d、e 最大為 3 的情形有 211 種
(5) a、b、c、d、e 最小為 2 且最大為 5 的情形有 620 種

11. 已知空間中有平面 E：$x-y+z-1=0$ 與直線 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}$，則下列敘述哪些正確？

(1)直線 L 與平面 E 的交點為$(2,0,-1)$

(2)直線 L 與平面 E 垂直

(3)平面 $y+z+1=0$ 包含直線 L 且與平面 E 垂直

(4)平面 E 和 xy 平面所夾的銳角大於 45°

(5)平面 E 與三坐標軸所圍成的四面體體積為 $\frac{1}{6}$

12. 設 a，b，c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2y+bz=-1 \\ 2x+3y-z=c \end{cases}$ 的敘述哪些正確？

(1)若此線性方程組有解，則可能恰有一組解或有無窮多組解

(2)若此線性方程組有唯一解，則 $a+b\neq-1$

(3)若此線性方程組有解，則 $c=0$

(4)若此線性方程組無解，則 $c\neq0$

(5)若此線性方程組無解，則 $a+b=-1$

第貳部分：選填題（占 40 分）

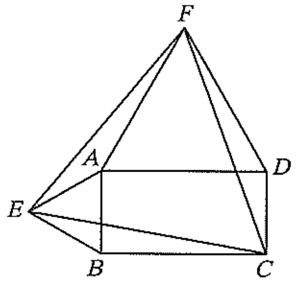
說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－35)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，若 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$，則實數 $k=$ ⑬⑭ 。

B. 已知竹苗中學有一橢圓形的操場，其跑道的形狀符合橢圓方程式 $\frac{(x-3)^2}{900}+\frac{(y-1)^2}{1600}=1$。(單位：公尺)，且一短軸頂點上有一直立旗杆。某日數學老師阿明在此操場跑道上慢跑，他發現在操場某長軸頂點上測得旗杆頂的仰角為 30 度，試問旗杆的高度為 $\frac{⑮⑯\sqrt{⑰}}{⑱}$ 公尺。(化為最簡根式)

C. 若 $f(x)$ 為五次多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 152，除以 $(x-2)$ 的餘式為 5，除以 $(x-1)^4$ 餘式為 8，試求 $f(3)=$ ⑲⑳㉑㉒ 。

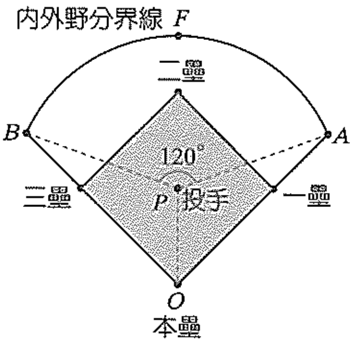
D. 右圖為平面上的一個圖形，已知 $ABCD$ 為矩形，分別自兩個邊向外做正三角形 ADF 及 AEB。若矩形 $ABCD$、正三角形 ADF 及正三角形 AEB 三者的面積和為 a，三角形 ECF 的面積為 b，且 $a=b+16$。試求矩形 $ABCD$ 的面積為 ㉓㉔ 。



E. 設標準位置角 $\theta=\dfrac{n}{12}\times180^\circ+45^\circ$，其中 n 為整數且 $60\leq n\leq120$，則有 ㉕㉖ 個 θ 會落在第三象限內。

F. 已知一數列：$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{4}{7}$，$\dfrac{9}{7}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{4}{9}$，$\dfrac{9}{9}$，$\dfrac{16}{9}$，$\dfrac{1}{11}$，$\dfrac{4}{11}$，$\dfrac{9}{11}$，$\dfrac{16}{11}$，$\dfrac{25}{11}$，……，依此規律，試求此數列的前 45 項的和為 ㉗㉘ 。

G. 假設大巨蛋棒球場的內野設計如右圖所示，此棒球場地的內外野分界線為一圓弧 $\overset{\frown}{AB}$，此圓弧的圓心為 P(投手的位置)，圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點為 F。若已知本壘所在的位置 O 點到圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 兩個端點 A、B 之距離均為 $100\sqrt{2}$ 呎，O 點到圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點 F 之距離為 $95\sqrt{3}$ 呎，且 $\angle AOB=90^\circ$，$\angle APB=120^\circ$。試求投手 P 至本壘 O 的距離 $\overline{PO}=$ $\dfrac{㉙㉚\sqrt{㉛}}{㉜}$ 呎。(化為最簡根式)



H. 已知在一個與變化量 x、y 有關的線性規劃作業中，有三個限制條件。在坐標平面上畫出符合這三個限制條件的區域，最後得到的可行解區域是一個三角形 ABC 及其內部區域(包含邊界)，已知 $A(3,3)$，$B(5,-7)$，$C(\alpha,\beta)$。在此可行解區域中，當目標函數為 $f(x,y)=x+2y$ 時，得到在 A 點有最大值，在 B 點有最小值。現因環境條件改變的需要，加入了第四個限制條件 $ax+by\leq c$，結果符合所有限制條件的可行解區域變成一個四邊形區域，頂點少了 $A(3,3)$，但新增了頂點 $D(1,1)$，$E(4,-2)$。若已知滿足上述條件的 $C(\alpha,\beta)$，其中 α 可能的最小範圍為 $m\leq\alpha<n$，m、n 為整數。請問數對 $(m,n)=$ (㉝㉞,㉟) 。

參考公式及可能用到的數值

1. 參考數值：$\sqrt{2} \approx 1.414$，$\log_{10} 2 \approx 0.3010$，$\log_{10} 3 \approx 0.4771$
2. 正弦定理：若$\triangle ABC$三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所對的邊長分別是a、b、c，則
   $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中$R$是$\triangle ABC$外接圓的半徑
3. 餘弦定理：若$\triangle ABC$三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所對的邊長分別是a、b、c，則
   $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
4. 正弦函數的和角公式：設α，β為任意角，則$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
5. 兩向量$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$的「內積」為$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$，其中$\theta$為$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$的夾角
6. 機率的定義：若一事件A有k個元素，而樣本空間U有n個元素，若每個元素出現的機會均等，則此事件A發生的機率就是$\dfrac{k}{n}$，寫成：$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{k}{n}$，其中$P(A)$表示事件$A$發生的機率
7. 設$\overrightarrow{u}=(a_1, b_1, c_1)$，$\overrightarrow{v}=(a_2, b_2, c_2)$，則$\overrightarrow{u}$和$\overrightarrow{v}$的外積定義為

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(2)	(5)	(4)	(1)	(2)	(1)(2)(3)	(1)(2)(3)(4)	(2)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(1)(2)(3)(4)	(1)(3)(4)(5)	(1)(2)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：能夠將日常生活的問題轉換成一元一次函數並加以解答

解析：如果 35 人都各買一張門票，則需要 $100\times35=3500$ 元

如果一次買 20 張門票，另 15 人各買一張門票，則需要 $100\times20\times0.9+100\times15=3300$ 元

如果一次買 30 張門票，另 5 人各買一張門票，則需要 $100\times30\times0.8+100\times5=2900$ 元

如果一次買 40 張門票，則需要 $100\times40\times0.7=2800$ 元

所以買 40 人團體票所需費用最少 $=2800$ 元

故選(4)。

2. (2)

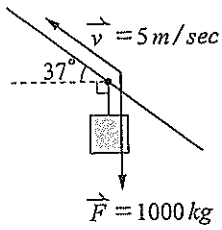
出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：利用平面向量的內積，解決日常生活上的問題

解析：引擎馬力 $P=\frac{1}{75}|\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}|$

$$=\frac{1}{75}\times1000\times5\times|\cos127^\circ|$$

$$=\frac{1}{75}\times5000\times\frac{3}{5}=40$$



故選(2)。

3. (5)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：了解向量的外積運算，能夠設定空間坐標解決問題

解析：設定空間坐標，

令 $A(0,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,0,1)$，$C(-1,1,0)$，$G(-1,1,1)$

則 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{EG}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{EB}=(0,1,-1)$

(1) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}|=|(0,1,0)\times(0,1,0)|=|(0,0,0)|=0$

(2) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|(0,1,0)\times(-1,1,0)|=|(0,0,1)|=1$

(3) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|(0,1,0)\times(-1,0,0)|=|(0,0,1)|=1$

(4) $|\overrightarrow{CE}\times\overrightarrow{AB}|=|(1,-1,1)\times(0,1,0)|=|(-1,0,1)|=\sqrt{2}$

(5) $|\overrightarrow{EB}\times\overrightarrow{EG}|=|(0,1,-1)\times(-1,1,0)|=|(1,1,1)|=\sqrt{3}$

故選(5)。

4. (4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

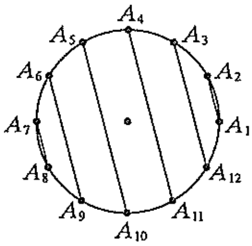
目標：了解古典機率的定義，能夠利用排列組合解決機率相關問題

解析：因為是圓內接梯形，所以是等腰梯形

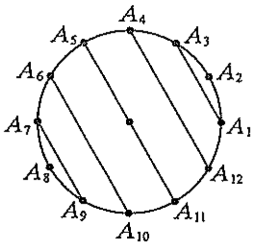
連 A_1A_2，則能構成圓內接梯形共有 $5-1=4$ 種(平行四邊形不是梯形)，如圖(一)

連 A_1A_3，則能構成圓內接梯形共有 $4-1=3$ 種(平行四邊形不是梯形)，如圖(二)

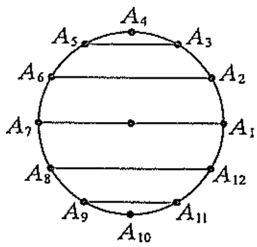
連 A_1A_7，則能構成圓內接梯形共有 4 種($\overline{A_1A_7}$ 為直徑)，如圖(三)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

依上述規律，以 A_1 為基準點，可以構成的圓內接梯形共有 $6\times4+4\times3+4=40$ 種

所以，圓內接梯形的個數總共有 $40\times12\div4=120$ 種

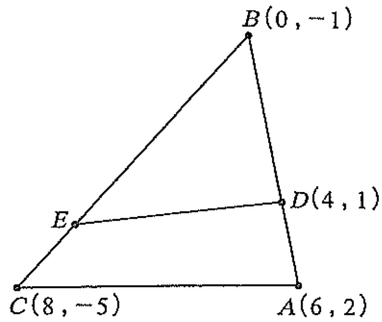
又樣本空間的個數為 $C^{12}_4=\dfrac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4}=495$，則四邊形為梯形的機率為 $\dfrac{120}{495}=\dfrac{8}{33}$

故選(4)。

5. (1)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：利用距離公式、面積比以及分點公式解決問題



解析：因為 $\overline{AD}=\sqrt{5}$，$\overline{BD}=2\sqrt{5}$，$\overline{BC}=4\sqrt{5}$

設 $\overline{BE}=x$

若 $\overline{DE}$ 要平分三角形 ABC 的面積，則

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{BD}\times\sin\angle EBD=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BA}\times\sin\angle CBA\right)$

又 $\angle EBD=\angle CBA$，得 $2\sqrt{5}x=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times3\sqrt{5}\Rightarrow x=3\sqrt{5}$

因此 $\overline{BE}:\overline{CE}=3\sqrt{5}:(4\sqrt{5}-3\sqrt{5})=3:1$

(另解：因為 $\overline{AD}$ ：$\overline{BD}=1:2$，由面積比，則三角形 DBE 的高必須為三角形 ABC 的高之 $\dfrac{3}{4}$，因此 $\overline{BE}$ ：$\overline{CE}=3:1$)

由內分點公式，得 $E\left(\dfrac{0\times1+8\times3}{1+3},\dfrac{(-1)\times1+(-5)\times3}{1+3}\right)=E(6,-4)$

所以 $\overline{DE}$ 的斜率為 $\dfrac{-4-1}{6-4}=-\dfrac{5}{2}$

故選(1)。

6. (2)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：利用條件機率了解並解決問題

解析：(1)╳：由條件機率可以計算出，無論先後順序，在抽獎之前，每個人的中獎機率皆相同$\left(皆為\dfrac{10}{30}\right)$

(2)○：沒中獎的彩券剩下 19 張，阿勇的中獎機率為 $\dfrac{10}{29}>\dfrac{10}{30}$

(3)╳：阿幸的中獎機率為 $\dfrac{9}{28}\neq\dfrac{10}{30}$

(4)╳：阿智的中獎機率為 $\dfrac{9}{27}=\dfrac{10}{30}<\dfrac{10}{29}$

(5)╳：最後一位抽，不一定是抽到沒有獎的彩券

故選(2)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解多項式函數的圖形，以及多項式不等式解的範圍

解析：(1)○：由解集合以及多項式函數的圖形，$f(x)$ 可以為 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)<0$

(2)○：由解集合以及多項式函數的圖形，$f(x)$ 可以為 $f(x)=(x-1)(x-2)^2>0$

(3)○：由解集合以及多項式函數的圖形，$f(x)$ 可以為 $f(x)=(x-1)^2(x-3)<0$

(4)╳：由解集合以及多項式函數的圖形，$f(x)$ 至少必須為 4 次式，例如：$f(x)$ 可以為 $f(x)=-(x-1)(x-2)^2(x-3)>0$

(5)╳：因 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸至少有一交點，故三次多項式不等式 $f(x)<0$ 之解不可能為所有的實數

故選(1)(2)(3)。

8. (1)(2)(3)(4)

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：了解圓錐曲線的定義，以及求圓錐曲線標準方程式

解析：(1)○：已知兩個頂點則可以確定橢圓中心的坐標，又知道一個焦點，則可以確定 c 及橢圓的形狀(左右或上下)，就可以求出橢圓的方程式

(2)○：已知雙曲線兩個焦點，則可以確定中心的坐標，c 及雙曲線的形狀(左右或上下)，又知道圖形上一個點的坐標，則可以求出 a 或 b

(3)○：已知準線及頂點的坐標，就可以求出 c 及拋物線的形狀(左右或上下)

(4)○：已知三個頂點，則可以求出中心、a 及 b、並確定橢圓的形狀

(5)╳：兩條漸近線的交點就是雙曲線的中心，只有漸近線無法求出雙曲線

故選(1)(2)(3)(4)。

9. (2)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：了解指數與對數的定義及運算規則，並能夠應用於實際問題

解析：(1)╳：$0\le L_A\le 12$

(2)○：因 $L_A+L_B=12$，當 $L_A=6$ 時，$L_B=6$，則 $n_A=n_B$

(3)╳：L_A 值增加 1，表示 A 細菌個數增加為 10 倍

(4)╳：L_A 值並無等差數列的性質

(5)○：$n_A=3\times10^6$，則 $L_A=\log(3\times10^6)=6+0.4771$，此時 $L_B=12-6-0.4771=5.5229$

故選(2)(5)。

10. (1)(2)(3)(4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：了解排列的定義，並能夠應用於實際問題

解析：(1)○：將 1、2、3、4、5、6 等六個點數任取出五個(不重複)由小而大排成一列，共有 $C_5^6=6$ 種

(2)○：將 1、2、3、4、5、6 等六個點數任取出五個(可重複)由小而大排成一列，

共有 $H_5^6=C_5^{10}=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4\times5}=252$ 種

(3)○：考慮 d 的值，

①若 $d=4$，則有 $C_3^3\times C_1^3=3$ 種

②若 $d=5$，則有 $C_3^4\times C_1^2=8$ 種

③若 $d=6$，則有 $C_3^5\times C_1^1=10$ 種

以上共計 21 種

(4)○：a、b、c、d、e 最大為 3，可想成點數 1、2、3 任取出五次(可重複)，再扣除不符合的情形，共有 $3^5-2^5=243-32=211$ 種

(5)╳：a、b、c、d、e 最小為 2 且最大為 5，可想成點數 2、3、4、5 任取出五次(可重複)，再扣除不符合的情形，共有 $4^5-3^5-3^5+2^5=1024-243-243+32=570$ 種

故選(1)(2)(3)(4)。

11. (1)(3)(4)(5)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：能夠了解並處理空間中的平面方程式以及直線方程式的問題

解析：(1) ○：由 L 的參數式，L 上動點 $P(1+t\,,\,-2+2t\,,\,1-2t)$，代入平面 E 得 $1+t-(-2+2t)+1-2t-1=0$，解得 $t=1$，交點為 $(2\,,\,0\,,\,-1)$

(2) ╳：平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(1\,,\,-1\,,\,1)$，直線 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(1\,,\,2\,,\,-2)$，$\overrightarrow{n}=(1\,,\,-1\,,\,1)$ 與 $\overrightarrow{v}=(1\,,\,2\,,\,-2)$ 不平行，故直線 L 與平面 E 不相互垂直

(3) ○：已知 $\overrightarrow{n}=(1\,,\,-1\,,\,1)$，$\overrightarrow{v}=(1\,,\,2\,,\,-2)$，則 $\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{v}=(0\,,\,3\,,\,3)$，又直線 L 上的一點 $(1\,,\,-2\,,\,1)$，得平面方程式 $y+z+1=0$

(4) ○：平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(1\,,\,-1\,,\,1)$，$xy$ 平面的法向量 $\overrightarrow{n'}=(0\,,\,0\,,\,1)$，

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{n'}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos45^\circ$，則夾角 $\theta>45^\circ$

(5) ○：平面 E 與三坐標軸的截距分別為 1、-1、1，則所圍成的四面體體積為 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{6}$

故選(1)(3)(4)(5)。

12. (1)(2)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：能夠利用高斯消去法處理聯立方程式解的問題

解析：由高斯消去法：

$$\begin{bmatrix}1&1&a&1\\1&2&b&-1\\2&3&-1&c\end{bmatrix}\times(-1)\ \times(-2)\ \rightarrow\begin{bmatrix}1&1&a&1\\0&1&b-a&-2\\0&1&-2a-1&c-2\end{bmatrix}\times(-1)\ \rightarrow\begin{bmatrix}1&1&a&1\\0&1&b-a&-2\\0&0&-a-b-1&c\end{bmatrix}$$

此線性方程組的解有三種情形：

①恰有一組解 $\Rightarrow -a-b-1\neq0$

②無窮多組解 $\Rightarrow -a-b-1=0$ 且 $c=0$

③無解 $\Rightarrow -a-b-1=0$ 且 $c\neq0$

故選(1)(2)。

第貳部分：選填題

A. -2

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：了解矩陣乘法的運算及性質

解析：由題目條件可知方陣 A 和方陣 B 具有矩陣乘法的交換性，即 $AB=BA$

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}k+6&6\\2k+8&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&3k+12\\4&10\end{bmatrix}$$

得 $k=-2$。

B. $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：了解橢圓方程式的性質

解析：由橢圓標準式，得橢圓的半長軸長 $a=40$，半短軸長 $b=30$

所以長軸的頂點到短軸的頂點之距離為 $\sqrt{40^2+30^2}=50$

又旗杆的仰角為 30 度，所以旗杆的高度為 $50\times\tan30^\circ=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ (公尺)。

【註】一般而言，操場跑道不是橢圓形

C. -104

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解除法原理及餘式定理的性質

解析：因 $f(x)$ 為五次多項式，由除法原理，設 $f(x)=(ax+b)(x-1)^4+8$

又由餘式定理，

$f(-1)=(-a+b)(-1-1)^4+8=-16a+16b+8=152$

$f(2)=(2a+b)(2-1)^4+8=2a+b+8=5$

解得 $a=-4$，$b=5$

所以 $f(x)=(-4x+5)(x-1)^4+8$

故 $f(3)=(-12+5)(3-1)^4+8=(-7)\times16+8=-104$。

D. 64

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：了解三角形的全等性質與面積的計算

解析：設矩形的長為 m，寬為 n，由題意以及圖形，可得

矩形 $ABCD$、正三角形 ADF 及正三角形 AEB 三者的面積和為 a，三角形 ECF 的面積為 b，$a=b+16$，

因 $\triangle AFE\cong\triangle BCE\cong\triangle DFC$，故知三角形 AFE 的面積為 16

又三角形 AFE 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times m\times n\times\sin150^\circ=\dfrac{1}{4}\times m\times n=16$

故矩形 $ABCD$ 的面積為 $m\times n=64$。

E. 13

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：了解廣義角的定義

解析：由 $\theta=\dfrac{n}{12}\times180^\circ+45^\circ=n\times15^\circ+45^\circ$，因為是落在第三象限的廣義角，則

$360^\circ\times k+180^\circ<n\times15^\circ+45^\circ<360^\circ\times k+270^\circ$，$k$ 為整數

$\Rightarrow 24k+9<n<24k+15$，$k$ 為整數

且 $60\leq n\leq120$

當 $k=2$ 時，$57<n<63$，取 $n=60$，61，62，有 3 個

當 $k=3$ 時，$81<n<87$，取 $n=82$，83，84，85，86，有 5 個

當 $k=4$ 時，$105<n<111$，取 $n=106$，107，108，109，110，有 5 個

共有 13 個。

F. 55

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：能夠應用 Σ 的性質處理級數的問題

解析：觀察數列的規律，可得此數列的前 45(＝1＋2＋3＋……＋9) 項的和為

$$\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{7}+\frac{9}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{19}+\cdots\cdots+\frac{81}{19}\right)$$

$$=\frac{1^2}{2\times1+1}+\frac{1^2+2^2}{2\times2+1}+\frac{1^2+2^2+3^2}{2\times3+1}+\cdots\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+9^2}{2\times9+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2}{2k+1}=\sum_{k=1}^{9}\frac{\frac{k\times(k+1)\times(2k+1)}{6}}{2k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{k\times(k+1)}{6}=\frac{1}{6}\times\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left(\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k\right)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}\right)$$

$=55$。

G. $\dfrac{85\sqrt{3}}{3}$

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能夠利用圓的性質處理生活中的問題

解析：如右圖，連接 $\overline{PF}$，作 $\overline{AC}\perp\overline{PF}$

則$\triangle AOC$為等腰直角三角形，

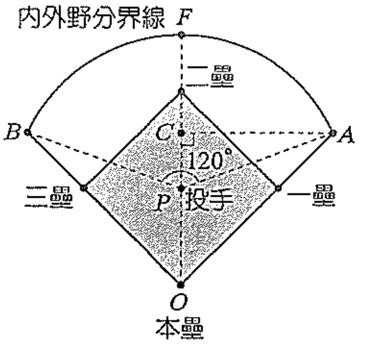
又 $\overline{OA}=100\sqrt{2}$，

則 $\overline{AC}=100$，$\overline{PA}=\dfrac{200\sqrt{3}}{3}=\overline{PF}$，

又 $\overline{OF}=95\sqrt{3}$，

則 $\overline{PO}=95\sqrt{3}-\dfrac{200\sqrt{3}}{3}=\dfrac{85\sqrt{3}}{3}$。

【註】一般而言，棒球場有固定規格



H. $(-3, 1)$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能夠了解並處理線性規劃的問題

解析：由可行解區域圖形可知，

滿足條件的 $C(\alpha, \beta)$ 必須在頂點 $D(1, 1)$ 的左邊，所以 $\alpha<1$

又因在 $B(5, -7)$ 有最小值，且目標函數為 $f(x, y)=x+2y$，

所以 $C(\alpha, \beta)$ 必須在 $x-y=0$ (直線 AC) 與

直線 $x+2y=-9$ (平行 $x+2y=0$ 且通過 B 點的直線)交點的右邊，

又 $x-y=0$，$x+2y=-9$ 的交點為$(-3, -3)$，所以 $-3\leq\alpha$

故數對 $(m, n)=(-3, 1)$。