TRML 團體賽-2018

俞克斌老師編寫

1. 設正整數n的各位數的數字之和表爲$S(n)$，例如：$S(1918)=1+9+1+8=19$。
若$n+S(n)=100$且n爲小於99的正整數，則$n=$________。【107 TRML 團體賽】

答：86

解：令$n=10a+b$，$a,b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$

則$(10a+b)+(a+b)=100\Rightarrow 11a+2b=100\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=6\end{cases}$

2. 設m、n爲正整數且$2^4+2^7+2^m=n^2$，則$m+n=$________。【107 TRML 團體賽】

答：28

解：$144+2^m=n^2\Rightarrow n^2-12^2=2^m\Rightarrow(n-12)(n+12)=2^m\xrightarrow{m,n\in N}\begin{cases}n=20\\m=8\end{cases}$

3. 四邊形$ABCD$內接於一個半徑爲1的圓，$\overline{AC}$爲直徑，且$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$，
則$\overline{BD}$之長爲________。【107 TRML 團體賽】

答：$\frac{4}{\sqrt{5}}$

解：令$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於N，故$\overrightarrow{AC}=4\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}\right)=4\overrightarrow{AN}$

則$\overline{BN}=5t$、$\overline{DN}=3t$、$\overline{AN}=\frac{1}{2}$、$\overline{CN}=\frac{3}{2}$

由圓的內冪性質：$5t\times3t=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2\sqrt{5}}$。則$\overline{BD}=8t=\frac{4}{\sqrt{5}}$

4. 給定空間的四點$A(2,2,-2)$、$B(12,1,8)$、$C(11,2,4)$、$D(1,3,-6)$。
若兩線段$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點坐標爲(a,b,c)，則$2a+b+c=$________。【107 TRML 團體賽】

答：16

解：$\begin{cases}2+9t&=12-11s\\2&=1+2s\\-2+6t&=8-14s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\s=\frac{1}{2}\end{cases}$，則交點$(a,b,c)=\left(\frac{13}{2},2,1\right)$

5. 有一加密信件，已知A、B、C三人猜對的機率分別爲$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，
且每人是否可猜出均互不影響，現三人同時猜譯此封加密信件，
在此信被猜譯出的條件下，請問此信恰是A一人猜譯出的機率爲________。
【107 TRML 團體賽】

答：$\frac{1}{6}$

解：條件機率：$\dfrac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{6}$

6. 設 a 、 b 、 c 爲正數，若 $\begin{cases} a^3=abc-5 \\ b^3=abc+2 \\ c^3=abc+21 \end{cases}$ ，則 $a^3+b^3+c^3=$ ________ 。

【107 TRML 團體賽】

答：36

解：由 $a^3-abc=a\left(a^2-bc\right)=-5 \xrightarrow{a,b,c\in N} \begin{cases} a=1 \\ bc=6 \end{cases}$

由 $\begin{cases} b\left(b^2-c\right)=2 \\ c\left(c^2-b\right)=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$

7. 整數 35^{15} 除以 121 的餘數爲 ________ 。 【107 TRML 團體賽】

答：32

解：$35^{15}=\left(33+2\right)^{15}=C_0^{15}33^{15}+C_1^{15}33^{14}\times2+\cdots+C_{13}^{15}33^2\times2^{13}$

$$+\underbrace{C_{14}^{15}33\times2^{14}+C_{15}^{15}2^{15}}_{\substack{8110080+32768 \\ =8142848 \\ =121\times67296+(32)}}$$

解：$R_{121}\left[35^{15}\right]=R_{121}\left[\left(35^5\right)^3\right]=R_{121}\left[10^3\right]=32$

8. 設 ΔABC 的內切圓在 $\overline{BC}$ 上的切點爲 D ，若 $\overline{AB}=10$ ， $\overline{AC}=8$ 且 $\angle A=60°$ ，則內積 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$ ________ 。 【107 TRML 團體賽】

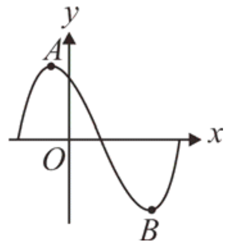
答：-20

解：$\overline{BC}=\sqrt{10^2+8^2-2\times10\times8\times\cos60°}=2\sqrt{21}$

故 $\overline{BD}=s-b=\left(9+\sqrt{21}\right)-8=\sqrt{21}+1$ 、 $\overline{CD}=s-c=\left(9+\sqrt{21}\right)-10=\sqrt{21}-1$

則內積 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\sqrt{21}+1\right)\left(\sqrt{21}-1\right)\cos180°=-20$

9. 右圖是曲線 $y=f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x+c$ 的部分圖形，其中 $A\left(\dfrac{-\pi}{6},2\right)$、$B\left(\dfrac{5\pi}{6},-2\right)$，且分別爲圖形的最高與最低點，則 $a+b+c=$________。 【107 TRML 團體賽】



答：$\sqrt{3}-1$

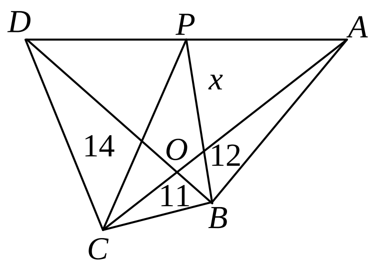
解：$y=f\left(x\right)=a\sin x+b\cos x+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\theta\right)+c$

其中 $\sqrt{a^2+b^2}=2$、$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$、$c=0$

故 $y=f\left(x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+0=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

10. 設凸四邊形 $ABCD$ 的兩對角線交於點 O，若 ΔOAB、ΔOBC、ΔOCD 的面積分別爲 12、11、14，且 P 爲 $\overline{AD}$ 的中點，則 ΔPBC 的面積爲________。 【107 TRML 團體賽】

答：24



解：令 $\Delta OAD=x\Rightarrow\begin{cases}\Delta PCD=\dfrac{14+x}{2}\\ \Delta PAB=\dfrac{12+x}{2}\end{cases}$

$\Delta PBC=ABCD-\Delta PAB-\Delta PCD$

$=\left(14+11+12+x\right)-\dfrac{12+x}{2}-\dfrac{14+x}{2}=24$