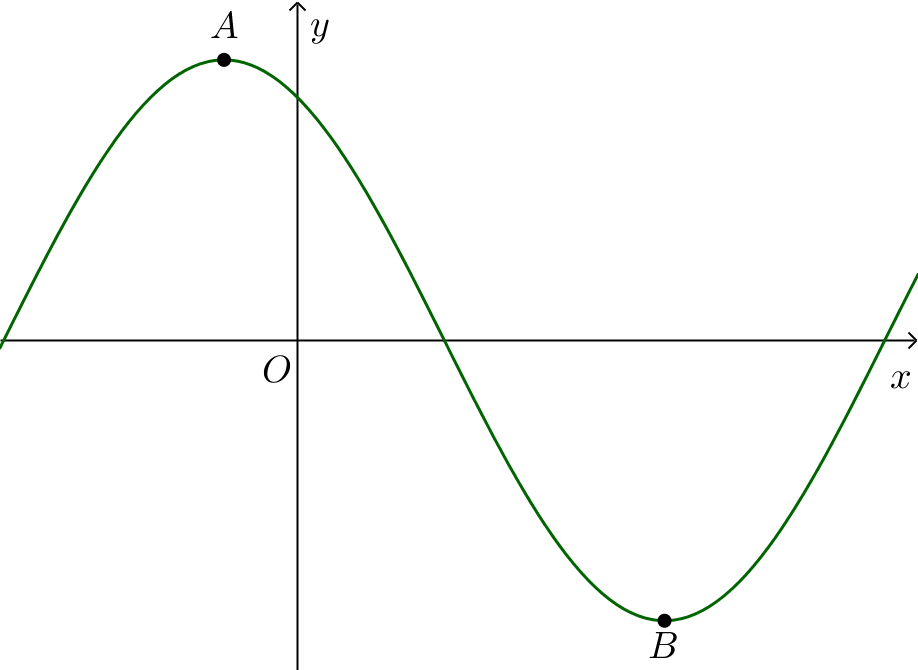
TRML 2018

團體賽

1. 設正整數*n*的各位數字之和表為，例如：。若且*n*為小於99的正整數，則？
2. 設*m*、*n*為正整數 且，則？
3. 四邊形*ABCD*內接於一個半徑為1的圓，為直徑，且，則之長為？
4. 給定空間的四點、、、。若兩線段與的交點坐標為，則？
5. 有一加密信件，已知*A*、*B*、*C*三人猜對的機率分別為、、，且每個人是否可猜出均互不影響。現三人同時猜譯此封加密信件，在此信被猜譯出的條件下，請問此信恰是*A*一人猜譯出的機率為？
6. 設*a*, *b*, *c*為正數，若，則？
7. 整數除以121的餘數為？
8. 設的內切圓在上的切點為*D*。若，且，則內積？
9. 右圖為曲線的部分圖形，其中、，且分別為圖形的最高與最低點，則？



1. 設凸四邊形*ABCD*的兩對角線交於點*O*。若、、的面積分別為12、11、14，且*P*為的中點，則的面積為？

團體賽參考解答

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 86 | 28 |  | 16 |  |
|  |  |  |  |  |
| 36 | 32 |  |  | 24 |

思考賽

一個正整數*n*可以唯一寫成，其中各而，稱是*n*的二進位表示法；0的二進位表示法是。用表示*n*的二進位表示法中1的個數；例如，因為，所以；再如，因為，所以。對於非負整數*i*和*m*，令及。（表集合中元素的個數）  
由定義，對任意非負整數*i*和*m*有。因為、、、、，所以、，遂有、、、、，以及、、、。請參考下頁一些的值，或許有助於看出一些題目的答案。

1. 將39寫成二進位表示法，並求之值。需如同上述說明一樣地顯示計算過程。
2. 試求集合並說明。需如同上述說明一樣地顯示計算過程。
3. 試求集合及之值。需顯示計算過程。
4. 是否存在一個正整數*m*使得。需說明理由。
5. 試求集合及之值。需顯示計算過程。
6. 對所有非負整數*i*和*r*，請說明。並求，需顯示計算過程。
7. 對所有非負整數*i*和*m*，試證明。
8. 對所有正整數*m*，試求之值。需顯示計算過程。
9. 是否存在一正整數*m*使得？需說明理由。
10. 對所有正整數*i*和非負整數*m*，試證明。
11. 對所有正整數*i*和非負整數*m*，試證明，其中，當時，當時。
12. 當時，試決定最小的及最大的使得。需說明理由。

思考賽參考解答

1. ，故
2. 設*n*為正整數且，則存在非負整數，使得   
   若，則；  
   若，則*n*可為, , ，其中10,12為中的元素；  
   若，則*n*可為, , , ，其中17,18為中的元素。  
   若，則，故。  
   因此, 。
3. 設*n*為正整數且，則存在非負整數，使得。  
   所有可能的*n*由小至大分別為1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,...,,…  
   其中僅有滿足，, 。
4. 否。中的元素*n*，必可被表示成，其中為非負整數，滿足。   
   故有, ，故其它2的冪次又非*n*的數，必不在*m*和之間。  
   也就是說集合至多只有一個元素。
5. 設*n*為正整數且，則存在非負整數，使得。  
   若，則；  
   若，則，且；  
   若，則；  
   因此僅有時，在取任意取值，為*n*屬於集合之充要條件。  
   

 (即在0,1,2,3,4,5選兩個整數，依大小分別為。

1. 以下先考慮   
   設*n*為正整數且，則存在非負整數，使得。  
   若，則；  
   若，則，且；  
   若，則；  
   因此僅有時，在取任意取值，為*n*屬於集合之充要條件。  
   故 (即在0,1,2,3,…,選個整數，依大小分別為)。  
   根據*F*的定義，集合,，至多有三個元素不同。  
   而，故。  
   當時，題幹已由定義得,  
   當時，,, ,  
   綜合以上，對任意非負整數*i*, *r*，皆有, 
2. 根據*F*的定義，集合,，至多有三個元素不同。  
   由2進位表示可知  (後方多1個0)  (後方多1個1)，故  
   ，其中同第11題題目所用。  
   因此。( *b*, *f* 的等式關係將在以下數題使用)
3. 承7，之充要條件為，即，即存在非負整數*k*使得。由此遞迴式可得



1. 是。承7，之充要條件為，即，即存在非負整數。而這樣的正整數無限多個，且，因此的值可取遍所有非負整數。
2. 令, 分別為所有非負奇數、非負偶數所形成的集合。  
   令, , 。  
   *A*為所有介在2*m*和間的偶數，滿足**，故為所有介在*m*和間的整數*a*，**，即。  
   *B*為所有介在 和間奇數，滿足**，故為所有介在*m*和間的整數*c*，**，即。

因此有。

1. 承7，，  
   再由10，得，  
   而，故，  
   因此
2. 承7，當。  
   因此我們只需要分別在大於、小於的數中找出最接近的整數*m*滿足。

若且，則最小之

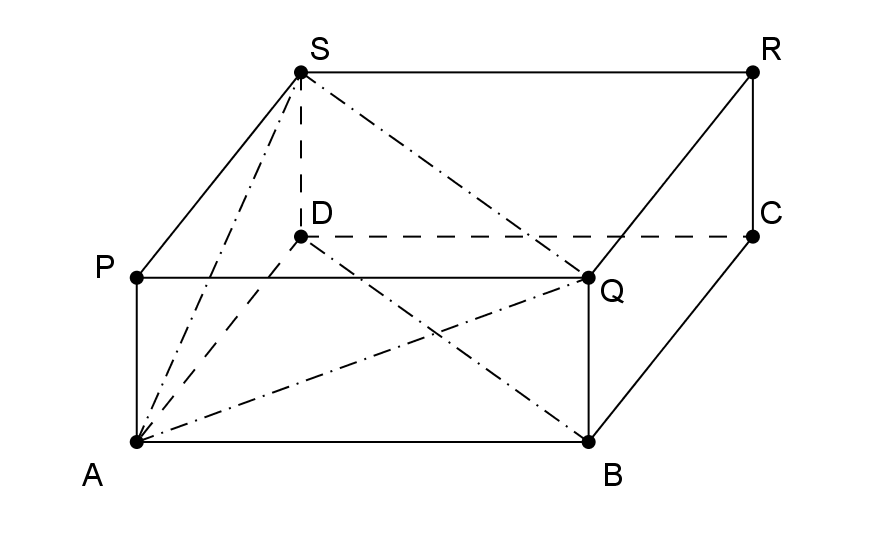
若且，則最大之

故

。

個人賽

1. 在凸四邊形*ABCD*中，若，，，且，則？
2. 已知二次函數的圖形與*y*軸交於點，且滿足，則？
3. 若坐標平面上，曲線與直線、及所圍成的區域面積為*A*，曲線與直線、及所圍成的區域面積為*B*，則？
4. *n*為正整數，且之值為質數時，則*n*的最大值為？
5. 若下圖是一長方體，其中，，則錐體*A*-*BQSD*的體積為？



1. 自1至20的自然數中選出3個相異數，其乘積為4的倍數之組合數有幾種？
2. 設*t*為正實數，且設中，，，，則面積的最大值為？
3. 某三位正整數，其各位數字之和為15，個位數字比百位數字多5。若將此三位正整數個位數與百位數互換所得的數為原數之3倍少39，則此三位數為？
4. 設*a*, *b*, *c*為實數，滿足。若以*m*表示*c*的最小值，以*M*表*c*的最大值，則數對？
5. 若*x*之方程式有4個相異實數解，則*c*的範圍為？
6. 等腰中，，且是的角平分線，交於*D*點。若，則？
7. 有一實數數列，設。若且，，則？

個人賽參考解答

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 17 | 42 | 14 | 6 | 795 |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 267 |  |  |  | 4039 |

接力賽

R1-1. 考慮所有5*x*6*y*的四位數。若5*x*6*y*是能被9整除的最大四位數，則個位數？

R1-2. 設*T*為前面傳來的答案。若，則的最大值為？

R1-3. 設*T*為前面傳來的答案。在中，，。若點*D*在上，滿足，則？

R2-1. 設*a*為實數。若坐標平面上滿足的所有點的圖形是斜率為3的直線，則？

R2-2. 設*T*為前面傳來的答案。若為等差數列，且，則？

R2-3. 設*T*為前面傳來的答案。若*a*, *b*為實數，且是方程式的二重根，則此方程式的另一實根為？

接力賽參考解答

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| R1-1. | R1-2. | R1-3. |
| 7 | 8 |  |
| R2-1. | R2-2. | R2-3. |
|  | 26 |  |

同分賽

1. 若數列與滿足且，則　　。
2. 除以169的餘數為何？

同分賽參考解答

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 486 | 27 |