全國公私立高級中學 106 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：106 年 9 月 4~5 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	1	4	5	3	2	1	135	14	3	25	135	4	1	6
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	6	8	9	9	1	8	0	0	2	7	6	0	3	1
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
1	7	5	8	8	2	0	1	2	7					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 已知 $\alpha+\beta=2k-1$，$\alpha\beta=k^2-3k+1$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2k-1)^2-2(k^2-3k+1)$

$=2k^2+2k-1$

又判別式為 $(2k-1)^2-4(k^2-3k+1)=8k-3\ge 0$，則 $k\ge\frac{3}{8}$

$2k^2+2k-1$ 原本在 $k=\frac{-1}{2}$ 時為頂點(最小值)，但 $k\ge\frac{3}{8}$

故當 $k=\frac{3}{8}$ 時，$\alpha^2+\beta^2$ 有最小值 $2\cdot\frac{9}{64}+2\cdot\frac{3}{8}-1=\frac{1}{32}$

故選(5)

2. $\log_3\frac{1}{3}<\log_3 0.7<\log_3 1\Rightarrow -1<a<0$

又 $b=\frac{1}{a}\Rightarrow b<-1$；$c=3b\Rightarrow c<b$

$0.7^3=0.7\times0.7\times0.7\Rightarrow 0<d<1$

$3^0<3^{0.7}<3^1\Rightarrow 1<e<3$

故 $e>d>a>b>c$，故選(1)

3. 令 $A=(\sqrt[3]{23})^4=23^{\frac{4}{3}}\Rightarrow \log A=\frac{4}{3}\cdot\log 23$

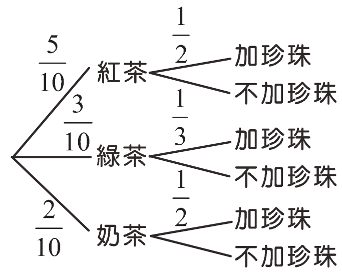
查表可得 $\log 23=1+\log 2.3=1.3617$

故 $\log A=\frac{4}{3}\cdot 1.3617=1.8156=1+0.8156$

再由查表可得 $\log 6.54=0.8156$

可知 A 的近似值為 $6.54\times10^1=65.4$，故選(4)

4.



所求為 $\dfrac{\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}$，故選(5)

5. 設此 20 個數字中有 a 個 -1，b 個 0，c 個 1，d 個 2

則 $\begin{cases}a+b+c+d=20\cdots\cdots①\\-a+c+2d=9\cdots\cdots②\\a+c+4d=35\cdots\cdots③\end{cases}$，由 ② ③ 式可得 $\begin{cases}c+3d=22\\a+d=13\end{cases}$

又所求 $S=-a+c+8d=9+6d$

而 a，b，c，d 皆為正整數或 0

可知 d 最大值為 7，故 $S=9+42=51$，故選(3)

6. 由根與係數的性質可知四根和為 $3+7=10$

令此等差數列的首項為 a

$\Rightarrow\frac{4\cdot(a+(a+6))}{2}=10\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$

$\therefore$此四根為 $\frac{-1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{7}{2}$，$\frac{11}{2}$

又 $p=\frac{-1}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{-7}{4}$，$q=\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{2}=\frac{33}{4}$ $\Rightarrow p+q=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$

故選(2)

7. 可設 $f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)+5$

又 $f(0)=3$ 可得 $a=-1$，所求為 $10\cdot f(3)=-30$，故選(1)

二、多選題

8. (1) 丙抽到中獎籤機率為 $\frac{3}{7}$

(2) 已知甲抽到中獎籤，則籤筒內剩 2 支中獎籤，丙抽到中獎籤機率為 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(3) 甲、乙、丙均抽到中獎籤的機率為 $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$

(4) 已知甲、乙、丙三人中恰有 1 人中獎，但三人中獎機率應是均等的，故皆為 $\frac{1}{3}$

(5) 已知丙中獎，可視為丙已經抽走中獎籤，此時甲中獎的機率是 $\frac{2}{6}$，乙中獎的機率也是 $\frac{2}{6}$，甲、乙都中獎的機率為 $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$，故在丙中獎的條件下，甲、乙至少一人中獎的機率為 $\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

[另解]設 A 事件表示丙中獎，B 事件表示甲、乙至少一人中獎

則所求為 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B')}{P(A)}$

又 $A\cap B'$ 表示甲不中且乙不中且丙中

故 $P(A\cap B')=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$，所求為 $1-\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{7}}=\frac{3}{5}$

故選(1)(3)(5)

9. (1)(2) 由算幾不等式知

$\frac{x+3y}{2}\ge\sqrt{x\cdot 3y}\Rightarrow 1\ge\sqrt{3xy}\Rightarrow xy\le\frac{1}{3}$

當 $x=3y$ 時，等號成立

(3)(4) $\because 2^x>0$，$8^y=2^{3y}>0$，由算幾不等式知

$\frac{2^x+8^y}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot 2^{3y}}=\sqrt{2^{x+3y}}=2\Rightarrow 2^x+8^y\ge 4$

當 $2^x=8^y=2$ 時等號成立，即 $x=1$，$y=\frac{1}{3}$

(5) $\log_2 x+\log_2 3y=\log_2 3xy\le\log_2 1=0$

故選(1)(4)

10. (1) α 有可能是正的

(2) 沒有說 a，b，c 是整數

(3) 由根與係數判斷可知正確
(4) 若 α 爲重根則不一定
(5) $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=x^4+x^3$
$\Rightarrow (a-1)x^3+bx^2+cx+1=0$
若 $a=1$ 則不一定有實根
故選(3)

11. (1) Y 對 X 的迴歸直線過 $(50,65)$ 和 $(40,57)$，故斜率爲 $\frac{8}{10}$
(2) $\frac{8}{10}=\frac{6}{10}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow\sigma_Y=\frac{4}{3}\sigma_X\Rightarrow\sigma_Y>\sigma_X$
(3) 不一定
(4) Z 與 Y 的相關係數應爲 -0.6
(5) $Z=-2X+30\Rightarrow\sigma_Z=2\sigma_X$
Y 對 Z 的迴歸直線斜率應爲
$(-0.6)\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_Z}=(-0.6)\cdot\frac{\sigma_Y}{2\sigma_X}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}=-\frac{2}{5}$
故選(2)(5)

12. (1) $n=3$ 時，可單取 1 號或 2 號或 3 號，或是取 1、3 號
故 $f(3)=4$
(2) $n=8$ 時，若選到 8 號，則表示 7 號不能選，前面 1~6 號的方法數有 $f(6)$ 種，再加上也可以單選 8 號一隻，所以總共有 $f(6)+1$ 種
(3) $n=8$ 時，若沒選到 8 號，表示前面選 1~7 號的方法都可以用，故有 $f(7)$ 種
(4) 由(2)(3)的推論可知，對所有 $n\ge 3$，恆有
$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+1$，又 $f(1)=1$
故可推得數列 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(10)$ 依序爲
1，2，4，7，12，20，33，54，88，143
(5) 以排列組合的觀點來看，可想成從 1~9 選出 k 個不相鄰的數字
$k=1$ 時，有 C_1^9 種取法；$k=2$ 時，有 C_2^8 種取法
$k=3$ 時，有 C_3^7 種取法；$k=4$ 時，有 C_4^6 種取法
$k=5$ 時，有 C_5^5 種取法
$\therefore f(9)=C_1^9+C_2^8+C_3^7+C_4^6+C_5^5$
故選(1)(3)(5)

第貳部分：選填題

A. 任意的拋物線必可通過不共線三點
故可知 A，B，C 三點共線，此直線斜率爲
$\frac{k+3-(-1)}{k^2-5-(-1)}=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}$
$\Rightarrow\frac{k+4}{k^2-4}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2k^2-3k-20=0\Rightarrow(2k+5)(k-4)=0$
$\Rightarrow k=\frac{-5}{2}$ (不合)或 $k=4$

B. 左邊第二支腳趾依序數下去的數字爲
2，6，8，12，14，18，20，…，96，98
可分成兩個級數
$2+8+14+20+\cdots+98$ 與 $6+12+18+\cdots+96$
總和爲 $\frac{17\cdot(2+98)}{2}+\frac{16\cdot(6+96)}{2}=1666$
[另解]左邊第一支腳趾的數字爲一公差爲 6 之等差數列：
1，7，13，…，97
所求即爲左邊第一支腳趾的數字和之 2 倍
故所求爲 $2\cdot\frac{(1+97)\cdot 17}{2}=1666$

C. 三位數爲 100~999 共 900 個
甲、乙兩人寫出一樣數字的機率是 $\frac{1}{900}$
故甲>乙的機率爲 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{900})=\frac{899}{1800}$

D. 設此三正數分別爲 a，ar，$ar^2\Rightarrow a+ar+ar^2=67$
又 $a-28$，$ar-2$，ar^2-1 爲等差數列
故 $(a-28)+(ar^2-1)=2(ar-2)$
$\Rightarrow a+ar^2=2ar+25$，又 $a+ar^2=67-ar$ 代入可得
$3ar=42\Rightarrow ar=14\Rightarrow a+ar^2=53$ 又 $a=\frac{14}{r}$ 代入
$\frac{14}{r}+\frac{14}{r}\cdot r^2=53\Rightarrow 14r^2-53r+14=0$
$\Rightarrow(7r-2)(2r-7)=0$
$r=\frac{2}{7}$ ($\because r<1$，$\therefore r=\frac{7}{2}$ 不合)

E. 原式 $=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2(k+1)^2}{4}}}$
$=\sum_{k=1}^{30}\frac{2}{k(k+1)}=2\cdot\sum_{k=1}^{30}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$
$=2\cdot(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31})=\frac{60}{31}$

F. 令 $x_i=5\sqrt{a_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{10}x_i^2=25(a_1+\cdots+a_{10})$ 且 $\bar{x}=7$
又 ${\sigma_x}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-(\bar{x})^2\Rightarrow 36=\frac{25}{10}(a_1+\cdots+a_{10})-7^2$
$\Rightarrow a_1+\cdots+a_{10}=34$，故所求爲 $\frac{34}{10}=\frac{17}{5}$

G. 先假設有兩組 $\boxed{\text{鳳凰}}$ 是相鄰的，如下：
$\boxed{\text{鳳凰}}$ $\boxed{\text{鳳凰}}$ 鳳 凰 紅 紅 粉 黃
再考慮下面兩種情形：
①第三組的「鳳」與「凰」不相鄰
先排其他 8 個字，第三組插縫隙
共有 $\frac{6!}{2!\cdot 2!}\cdot 7\cdot 6=7560$ 種
②第三組「鳳」與「凰」相鄰，但必爲 $\boxed{\text{凰鳳}}$
$\boxed{\text{鳳凰}}$ $\boxed{\text{鳳凰}}$ $\boxed{\text{凰鳳}}$ 紅 紅 粉 黃
共有 $\frac{7!}{2!\cdot 2!}=1260$ 種
故恰 2 組 $\boxed{\text{鳳凰}}$ 共有 7560+1260=8820 種

H. 令 $\log_3 x=t$，原方程式變爲 $t^2+3t-5=0$
設其解爲 t_1，$t_2\Rightarrow\log_3\alpha=t_1$，$\log_3\beta=t_2$
$\Rightarrow t_1+t_2=\log_3\alpha\beta=-3\Rightarrow\alpha\beta=3^{-3}=\frac{1}{27}$