全國公私立高級中學

106 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

考試日期：106 年 9 月 4~5 日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 k 爲實數，且 α、β 爲方程式 $x^2-(2k-1)x+(k^2-3k+1)=0$ 的兩實根。求 $\alpha^2+\beta^2$ 的最小值爲？

   (1) $\frac{-3}{2}$
   (2) $\frac{-5}{2}$
   (3) $\frac{-3}{8}$
   (4) $\frac{5}{16}$
   (5) $\frac{1}{32}$

2. 試比較 $a=\log_3 0.7$，$b=\log_{0.7} 3$，$c=\log_{0.7} 3^3$，$d=(0.7)^3$，$e=3^{0.7}$ 的大小：

   (1) $e>d>a>b>c$
   (2) $e>d>b>c>a$
   (3) $d>e>a>b>c$
   (4) $d>e>b>a>c$
   (5) $e>d>c>b>a$

3. 表(1)爲常用對數表的一部分，試利用下表求出 $(\sqrt[3]{23})^4$ 的近似值爲？

   (1) 66.6
   (2) 24.4
   (3) 81.5
   (4) 65.4
   (5) 15.2

表(1)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1815	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8232	8241	8248	8254

4. 「扛拜」飲料店舉行店長跳樓大放送，每日免費贈送 100 杯飲料給前 100 名的顧客。已知這 100 杯中有 50 杯紅茶、30 杯綠茶、20 杯奶茶。再從做好的紅茶跟奶茶中分別挑一半的杯數加入珍珠，綠茶則只挑其中 10 杯加入珍珠。今日小君幸運排隊拿到免費飲料，若已知小君的飲料有加珍珠，求小君的飲料是珍珠奶茶的機率為？

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{5}{9}$

(4) $\frac{1}{10}$

(5) $\frac{2}{9}$

5. 設 a_1，a_2，⋯，a_{20} 均為整數，且 $\sum_{k=1}^{20} a_k = 9$，$\sum_{k=1}^{20} (a_k)^2 = 35$，又 $-1 \le a_k \le 2$（其中 $1 \le k \le 20$），令 $S = \sum_{k=1}^{20} (a_k)^3$，則 S 的最大值為？

(1) 63

(2) 57

(3) 51

(4) 47

(5) 45

6. 設四次方程式 $(x^2-3x+p)(x^2-7x+q)=0$ 有四個相異實根，其中 p，q 為實數。已知此四根恰成為一公差為 2 的等差數列，求 $p+q=$？

(1) $\frac{37}{2}$

(2) $\frac{13}{2}$

(3) $\frac{5}{2}$

(4) $\frac{61}{2}$

(5) 10

7. 設三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=f(-1)=f(2)=5$ 且 $f(0)=3$，試求 $(x^2+1)\cdot f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式爲？

(1) -30

(2) -3

(3) -1

(4) 13

(5) 130

二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 籤筒中有 7 支籤，其中 3 支爲中獎籤，設每支籤被抽到的機率均等。現甲、乙、丙三人依序抽 1 支籤，取出的籤不再放回籤筒中。請選出正確的選項。

(1) 丙抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{7}$

(2) 已知甲抽到中獎籤，則丙抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{7}$

(3) 甲、乙、丙均抽到中獎籤的機率是 $\frac{1}{35}$

(4) 已知甲、乙、丙三人中恰有 1 人抽中，則是丙抽中的機率是 $\frac{18}{35}$

(5) 已知丙抽到中獎籤，則甲、乙至少有 1 人抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{5}$

9. 設 $x>0$ 且 $y>0$，已知 $x+3y=2$。請選出正確的選項。

(1) xy 之最大值爲 $\frac{1}{3}$

(2) 當 $x=y$ 時，xy 有最大值

(3) 2^x+8^y 之最小值爲 2

(4) 當 $(x,y)=(1,\frac{1}{3})$ 時，2^x+8^y 有最小值

(5) $\log_2 x+\log_2 3y$ 有最大值 1

10. 設多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$，其中 a，b，c 為實數。已知實數 α 為方程式 $f(x)=0$ 的一根。請選出正確的選項。

(1) $\alpha<0$

(2) 若 α 為整數，則 α 必為 1 或 -1

(3) 方程式 $f(x)=0$ 所有的根乘積為 1

(4) 考慮 $g(x)=f(x)+0.0001$，則方程式 $g(x)=0$ 至少有一實根

(5) 考慮 $h(x)=x^4+x^3$，則 $f(x)$ 與 $h(x)$ 的圖形在坐標平面上至少有一交點

11. 已知某班在模擬考的數學成績 (X) 與英文成績 (Y) 的平均數分別為 $\bar{x}=50$，$\bar{y}=65$，且其相關係數為 0.6。若在坐標平面上，Y 對 X 的迴歸直線經過點 $(40,57)$，請選出正確的選項。

(1) Y 對 X 的迴歸直線斜率為 0.6

(2) Y 的標準差大於 X 的標準差

(3) 若該班的班長在此次模擬考數學考 50 分，則英文必定是 65 分

(4) 若另一筆資料 Z 滿足 $Z=-2X+30$，則 Z 與 Y 的相關係數仍為 0.6

(5) 承(4)，Y 對 Z 的迴歸直線斜率為 -0.4

12. 在收容所中有 n 隻流浪狗編號 $1\sim n$ 號，志工媽媽每次會由這 n 隻狗狗中選出若干隻編號不相鄰的狗狗放出來玩耍。舉例來說，若有 7 隻狗狗編號 1~7 號，志工媽媽可以放出編號 2、4、7 號，或是選擇放出 1、5 號，甚至一次只單放一隻狗狗也可以。假設 n 隻流浪狗共有 $f(n)$ 種選法。請選出正確的選項。

(1) $f(3)=4$

(2) 假設 $n=8$，選到 8 號狗狗的方法數有 $f(6)$ 種

(3) 假設 $n=8$，沒選到 8 號狗狗的方法數有 $f(7)$ 種

(4) $f(10)=142$

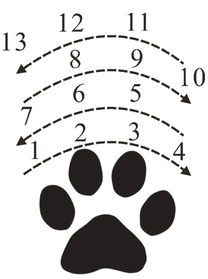
(5) $f(9)=C_1^9+C_2^8+C_3^7+C_4^6+C_5^5$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13–40）。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上有相異三點 $A(2,1)$，$B(-1,-1)$，$C(k^2-5,k+3)$，其中 k 為正實數。若已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 通過 A、B 兩點，但必不通過 C 點，求 $k=$ ⑬。

B. 如圖(1)，是一隻狗狗的腳掌印，我們按照圖示那樣數數字，數到 100 即停止。試問此時左邊第 2 支腳趾(前三個數字為 2、6、8)的所有數字總和為 ⑭⑮⑯⑰。



圖(1)

C. 設甲、乙兩人隨機各寫一個三位數，求甲寫的數字比乙寫的數字大的機率是 $\dfrac{⑱⑲⑳}{㉑㉒㉓㉔}$。(化為最簡分數)

D. 已知三正數成等比數列，公比小於 1，其和為 67。現將各項依序減去 28、2、1 後，此三數變為等差數列。求原等比數列的公比為 $\dfrac{㉕}{㉖}$。(化為最簡分數)

E. 試求 $\dfrac{1}{\sqrt{1^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+30^3}}=\dfrac{㉗㉘}{㉙㉚}$ 。

(化爲最簡分數)

F. 有 10 個正數 a_1，a_2，…，a_{10}，將此 10 個數字皆開根號再乘以 5 後得到新的 10 個數字爲 $5\sqrt{a_1}$，$5\sqrt{a_2}$，…，$5\sqrt{a_{10}}$。已知這 10 個新數字之算術平均數爲 7，標準差爲 6，求原先 a_1，a_2，…，a_{10}的算術平均數爲 $\dfrac{㉛㉜}{㉝}$ 。(化爲最簡分數)

G. 將「紅鳳凰黃鳳凰粉紅鳳凰」10 個字重新排列。原文有三組「鳳凰」，若希望排列後的結果變爲恰有兩組「鳳凰」，位置不限，例如「$\boxed{\text{鳳凰}}$紅黃$\boxed{\text{鳳凰}}$粉鳳紅凰」是可以的，但「$\boxed{\text{鳳凰}}$凰鳳紅黃粉鳳紅凰」和「紅黃$\boxed{\text{鳳凰鳳凰}}$粉紅$\boxed{\text{鳳凰}}$」就不行。試問總共有 ㉞㉟㊱㊲ 種排列方式。

H. 已知方程式 $\log_3 x^{\log_3 x}+\log_3 x^3-5=0$ 有兩實根 α 及 β，求 $\alpha\cdot\beta=\dfrac{㊳}{㊴㊵}$ 。(化爲最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 通過 $(x_1\,,y_1)$ 與 $(x_2\,,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ， $x_2\neq x_1$

3. 首項爲 a_1 且公差爲 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

4. 首項爲 a 且公比爲 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r\neq 1$

5. 級數和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

6. 算術平均數 $\displaystyle\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ，標準差 $\displaystyle\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

7. 相關係數 $\displaystyle r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$

8. Y 對 X 的迴歸直線 L： $\displaystyle y-\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}(x-\overline{x})$

9. $\log 2\approx 0.3010$ ； $\log 3\approx 0.4771$