107 高餐附中

\# koeagle

一、單選題 (每題 3 分，共 12 分)

1. 設 x, y, z, u 為正整數，則 $x+y+z^2+u^3=21$ 有幾組解？
   $(A)252$　$(B)237$　$(C)352$　$(D)68$　$(E)572$。

sol： 先給定 u, z，再討論 x, y

u	1	1	1	1	2	2	2
z	1	2	3	4	1	2	3
x+y	19	16	11	4	12	9	4
組數	18	15	10	3	11	8	3

$\therefore\ 18+15+10+3+11+8+3=68$ 組。

2. 設矩陣 $A=[a_{ij}]_{10\times 15}$，其中 $a_{ij}=2j^2-i$，則 A 中的所有元素之總和為？
   $(A)23975$　$(B)20050$　$(C)-1950$　$(D)14380$　$(E)0$。

sol： $$\sum_{i=1}^{10}\left[\sum_{j=1}^{15}(2j^2-i)\right]=\sum_{i=1}^{10}\left[2\times\frac{15\times 16\times 31}{6}-15i\right]=\sum_{i=1}^{10}[2480-15i]$$

$$=2480\times 10-15\times\frac{10\times 11}{2}=24800-825=23975$$。

3. 設 $10\le x\le 100$，若 $\log x^2$ 與 $\log x^{-2}$ 尾數相同，所有滿足條件的 x 會成等比數列，公比為？$(A)1$　$(B)10^{0.15}$　$(C)10^{0.25}$　$(D)10^{0.35}$　$(E)10^{0.45}$。

sol： 因為 $\log x^2$ 與 $\log x^{-2}$ 尾數相同

$\log x^2-\log x^{-2}=(2\log x)-(-2\log x)=4\log x\in\mathbb{N}$

令 $4\log x=k$, $k\in\mathbb{N}$ $\quad\Rightarrow\quad \log x=\dfrac{k}{4}$, $k\in\mathbb{N}$

又 $10\le x\le 100\quad\Rightarrow\quad 1\le\log x=\dfrac{k}{4}\le 2$, $k\in\mathbb{N}$

$\therefore\ x=10^{\frac{k}{4}}$, $k=1,2,\cdots,8\quad\Rightarrow\quad$ 公比 $r=10^{\frac{1}{4}}=10^{0.25}$。

4. 已知 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，則 $f(x^5)+2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為？
   $(A)1$　$(B)7$　$(C)x$　$(D)5x$　$(E)-1$。

sol： $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\dfrac{x^5-1}{x-1} \Rightarrow f(x)\Big| x^5-1 \Rightarrow x^5\equiv 1 \left(\operatorname{mod} f(x)\right)$

$\therefore\ f(x^5)+2=(x^5)^4+(x^5)^3+(x^5)^2+(x^5)+1+2\equiv 1^4+1^3+1^2+1+1+2\equiv 7\left(\operatorname{mod} f(x)\right)$。

二、填充題 (每題 5 分，共 75 分，請簡列其過程)

1. 求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ 的值 = ________。

sol： $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}$。

2. 設 x,y,z 為實數，$x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=6$，求 $x^3+y^3+z^3$ 的最大值 = ____。

sol： * 構造一個以 x,y,z 為三實根的函數 $f(A)$

$\because\ (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=-3$

又 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

令 $xyz=k$

由根與係數關係可知，以 x,y,z 為三實根的函數：

$f(A)=A^3-3A-k \quad\Rightarrow\quad f'(A)=3A^2-3=3(A+1)(A-1)$

又因為 $f(A)$ 有三實根 $\quad\Rightarrow\quad f(1)\times f(-1)\le 0$

$(1-3-k)(-1+3-k)\le 0 \quad\Rightarrow\quad (k+2)(k-2)\le 0 \quad\Rightarrow\quad -2\le k\le 2$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3$ 最大值為 $3\times 2=6$。

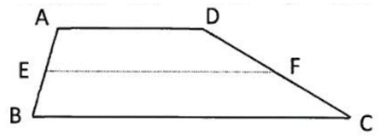
3. 已知複數 Z 滿足 $Z\cdot\overline{Z}=4$，求 $|1+\sqrt{3}i+Z|$ 的最大值 = ______，與最小值 = ______。

sol： $z\cdot\overline{z}=|z|^2=4 \Rightarrow |z|=2 \Rightarrow z$ 在複數平面上為圓心 $(0,0)$，半徑 2 的圓

$|z+1+\sqrt{3}i|=|z-(-1-\sqrt{3}i)| \quad\Rightarrow\quad$ 圓 $x^2+y^2=4$ 上一點到 $(-1,-\sqrt{3})$ 距離

又 $(-1,-\sqrt{3})$ 在圓 $x^2+y^2=4$ 上 $\quad\therefore$ 最大值 $=4$，最小值 $=0$。

4. 下圖為梯形，$\overline{EF}$ 為中線，$\angle ABC = 50°, \overline{AD} = 5, \overline{DC} = 6, \overline{BC} = 11$，請問 $\angle ADC$ $=$ ________。



sol： * 延長 $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 G，令 $\overline{DG} = x$

$\because\ \triangle GBC \sim \triangle GAD \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} : \overline{AD} = \overline{GC} : \overline{GD}$

$11 : 5 = (x+6) : x \quad \Rightarrow \quad 5(x+6) = 11x \quad \Rightarrow \quad x = 5$

又 $\overline{BC} = \overline{GC} = 11 \quad \Rightarrow \quad \triangle GBC$ 為等腰三角形，$\angle BGC = 50°$

$\therefore\ \angle ADC = 50° + 50° = 100°$。

5. 一橢圓的中心在原點，長軸在 x 軸上，若此橢圓內切於梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ 平行軸且 $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{CD} = 4, \overline{BC} = 10$，長軸長為 ________。

sol： * 坐標化，令橢圓中心在原點 $(0,0)$，過 A 作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 於點 H

因為梯形 $ABCD$ 為等腰梯形 $\Rightarrow\ \overline{BH} = \dfrac{1}{2}(10-4) = 3$, $\overline{AH} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

$\therefore$ 橢圓短軸長 $2b = \sqrt{7}$，各點坐標為：$A(-2, \dfrac{\sqrt{7}}{2})$, $B(-5, -\dfrac{\sqrt{7}}{2})$, $C(5, -\dfrac{\sqrt{7}}{2})$, $D(2, \dfrac{\sqrt{7}}{2})$

令橢圓：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$

* 橢圓切線公式：$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$$\overleftrightarrow{CD} : y - \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\frac{-\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}}{5-2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x + \frac{7\sqrt{7}}{6}$$

$$\Rightarrow\ \frac{7\sqrt{7}}{6} = \sqrt{a^2m^2 + b^2} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{7(4a^2+9)}{36}}$$

$\Rightarrow\ 7^2 = 4a^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{10}$

$\therefore$ 長軸長 $2a = 2\sqrt{10}$。

6. 有三個糖果罐 (如圖)，罐子上的標籤均貼錯，請問最少共要試吃幾顆糖果，就可以知道每一個罐子的正確口味？請寫出您的方法並簡單說明。「註：每一顆糖果不是巧克力就是花生口味，綜合表示罐內同時有巧克力口味的糖果和花生口味的糖果。」

sol： * 先吃綜合！

(1) 如果吃到花生，則：綜 $\rightarrow$ 花，花 $\rightarrow$ 巧，巧 $\rightarrow$ 綜。

(2) 如果吃到巧克力，則：綜 $\rightarrow$ 巧，巧 $\rightarrow$ 花，花 $\rightarrow$ 綜。

$\therefore$ 最少吃一顆。

7. 數列 $<a_n>$ 中，若 $a_1 = 1, \sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n} = a_n$(其中 $n \geq 2$，S_n 為數列的前 n 項總和)，求 $a_{107} =$ ＿＿＿＿＿。

sol： $a_n = S_n - S_{n-1} = (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = a_n \times (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$

$\therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 \ , \forall n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{S_{k+1}} - \sqrt{S_k}) = (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) + (\sqrt{S_{n-1}} - \sqrt{S_{n-2}}) + \cdots + (\sqrt{S_3} - \sqrt{S_2}) + (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})$$

$n - 1 = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{S_n} = n - 1 + 1 = n \quad \Rightarrow \quad S_n = n^2$

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore a_{107} = 2 \times 107 - 1 = 203$。

8. 設 α, β, γ 為方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ 的三個根，則 $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) =$ ＿＿＿＿＿。

sol： (1) 凡得孟行列式：若 $x^3 + px + q = 0$，則 $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = -4p^3 - 27q^2$

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

其中 $s_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$

由根與係數關係可知：

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \\ \alpha\beta\gamma=-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) \\ \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=-p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-q(\alpha+\beta+\gamma) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2p \\ s_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3q \\ s_4=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2p^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix}=-4p^3-27q^2\text{。}$$

(2) 根與係數關係：

$$x^3-x-1=0\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1 \\ \alpha\beta\gamma=1 \end{cases}$$

$\because\ \alpha,\beta$ 為 $x^3-x-1=0$ 的根

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^3-\alpha-1=0 \\ \beta^3-\beta-1=0 \end{cases} \Rightarrow\ \alpha^3-\beta^3-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1)=0$$

$$\Rightarrow\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-1=0\ \Rightarrow\ (\alpha-\beta)^2=1-3\alpha\beta=1-\frac{3}{\gamma}$$

同理可得：$(\beta-\gamma)^2=1-\dfrac{3}{\alpha}$，$(\gamma-\alpha)^2=1-\dfrac{3}{\beta}$，則

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)\left(1-\frac{3}{\beta}\right)$$

$$=1-\frac{3}{\alpha}-\frac{3}{\beta}-\frac{3}{\gamma}+\frac{9}{\alpha\beta}+\frac{9}{\beta\gamma}+\frac{9}{\gamma\alpha}-\frac{27}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=1-\frac{3}{\alpha\beta\gamma}(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)+\frac{9}{\alpha\beta\gamma}(\gamma+\alpha+\beta)-\frac{27}{\alpha\beta\gamma}=1+3+0-27=-23$$

$\therefore\ (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=\pm\sqrt{23}i$。

(3) 微分：

$f(x)=x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$f'(x)=3x^x-1=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

$\Rightarrow\ f'(\alpha)\cdot f'(\beta)\cdot f'(\gamma)=-(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$

又 $f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)\cdot f'(\gamma)=27\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\beta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\beta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\gamma+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\gamma-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=27\times\left[-f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\times\left[-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=23$$

$\therefore\ (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=\pm\sqrt{23}i$。

9. 一等差數列的項數為奇數，若奇數項總和為 91，偶數項總和為 84，則此數列共有 ________ 項。

sol： * 令項數為 $2k+1$，則等差中項為 a_{k+1}

$$\begin{cases}91=(k+1)\times a_{k+1}\\ 84=k\times a_{k+1}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{91}{84}=\frac{k+1}{k}\quad\Rightarrow\quad k=12\quad\therefore\ \text{共 25 項。}$$

10. 設 $\sqrt{2}\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta=1$，而 θ_1 及 θ_2 為滿足此方程式之兩角，且 $-90^\circ<\theta_1<\theta_2<90^\circ$，求 $\tan(\theta_1+\theta_2)$ 之值 ________。

sol： $\because\ \theta_1$, θ_2 為兩解 $\Rightarrow\ \begin{cases}\sqrt{2}\cos 2\theta_1+\sqrt{3}\sin 2\theta_1=1\\ \sqrt{2}\cos 2\theta_2+\sqrt{3}\sin 2\theta_2=1\end{cases}$

兩式相減：$\sqrt{2}\left(\cos 2\theta_2-\cos 2\theta_1\right)+\sqrt{3}\left(\sin 2\theta_2-\sin 2\theta_1\right)=0$

和差化積：$\sqrt{2}\times\left[-2\sin\left(\theta_2+\theta_1\right)\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\right]+\sqrt{3}\times\left[2\cos\left(\theta_2+\theta_1\right)\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\right]=0$

$\because\ -90^\circ<\theta_1<\theta_2<90^\circ\quad\Rightarrow\quad\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\neq 0$

$\Rightarrow\quad -2\sqrt{2}\sin\left(\theta_2+\theta_1\right)+2\sqrt{3}\cos\left(\theta_2+\theta_1\right)=0$

$\therefore\ \tan\left(\theta_1+\theta_2\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$。

11. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，若 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=3$，且 $y=f(x)$ 無極值，求 a 值的範圍為 ____________。

sol： $\because\ \displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=3\quad\Rightarrow\quad f(-1)=a-b+c-1=0\quad\Rightarrow\quad a-b+c=1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left[x^2+(a-1)x+(-a+b+1)\right]=3 \quad\Rightarrow\quad 2a=b$$

又 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\because\ y=f(x)$ 無極值 $\quad\Rightarrow\quad (2a)^2-4\cdot 3\cdot b\le 0 \quad\Rightarrow\quad 4a^2-12b\le 0$

$\Rightarrow\quad a^2-3\cdot(2a)\le 0 \quad\Rightarrow\quad a(a-6)\le 0 \qquad \therefore\ 0\le a\le 6$。

12. 過 $A(1,2)$ 作直線與拋物線 $x^2-5y=0$ 交於 P,Q，若 $\angle POQ=90^\circ$ 為，試求 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的直線方程式為 ________________。

sol： * 拋物線 $x^2=4cy$, $O(0,0)$ 為頂點，與直線 L 交於 P,Q 兩點且 $\angle POQ=90^\circ$，

則直線 L 必過點 $(0,4c)$。

$\Rightarrow\ \overleftrightarrow{PQ}$ 必過 $(0,5) \quad \therefore\ \overleftrightarrow{PQ}: y-5=\dfrac{2-5}{1-0}(x-0) \quad\Rightarrow\quad 3x+y-5=0$。

13. 求拋物線 $y=-x^2+2x$ 與直線 $y=-x$ 的圖形所圍成之封閉區域繞 x 軸旋轉一圈所得之旋轉體的體積 __________。

sol： $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，頂點 $(1,1)$

$$V=\int_0^1 \pi(-x^2+2x)^2\,dx+\int_1^2 \pi(-x)^2\,dx+\int_2^3 \pi\left[(-x)^2-(-x^2+2x)^2\right]dx=\frac{20}{3}\pi$$。

14. 銳角 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+B)=\dfrac{3}{5},\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$，設 $\overline{AB}=3$，求 $\overline{AB}$ 邊上的高 ________。

sol： 令 $\overline{AB}$ 邊上的高為 $\overline{CH}$，$\begin{cases}\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B=\dfrac{4}{5}\\[2mm] \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

相除：$\tan A\times\dfrac{1}{\tan B}=2 \quad\Rightarrow\quad \tan A=2\tan B$, $\overline{AH}=1$, $\overline{BH}=2$

又 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C=\dfrac{3}{5} \quad\Rightarrow\quad \tan C=\dfrac{3}{4}$

$$\tan C=-\tan(A+B)=\frac{-(\tan A+\tan B)}{1-\tan A\tan B}=\frac{-3\tan B}{1-2\tan^2 B}=\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow\ 2\tan^2 B-4\tan B-1=0 \quad\Rightarrow\quad \tan B=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ （取正，$\angle B$ 為銳角）

$\Rightarrow\ \tan B=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\tan A=2+\sqrt{6}$ $\quad\therefore\ \overline{CH}=\overline{AH}\cdot\tan A=2+\sqrt{6}$。

15. 一個不公正的硬幣，擲出正面的機率為 $\dfrac{2}{3}$，若擲 n 次，則硬幣出現偶數次正面的機率 $=$ ________。

sol： 令 P_k 為第 k 次出現偶數次正面的機率，$P_1=\dfrac{1}{3}$ (0 次正面)

$$P_k=\frac{1}{3}\times P_{k-1}+\frac{2}{3}\times(1-P_{k-1})=\frac{1}{3}P_{k-1}+\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\ P_k-\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow\ P_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right)=\cdots=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$$\therefore\ P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}。$$

另解：生成函數 $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{2}{5}\right)^n$，則偶數次正面的機率為偶數次項係數和！

$$\therefore\ \frac{f(1)+f(-1)}{2}=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{2}。$$

三、計算題 (第一題 6 分，第二題 7 分，共 13 分，沒有過程不給分)

1. 試求所有滿足以下不等式的正整數 a,b,c：$\dfrac{41}{42}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le 1$。

sol： $\dfrac{41}{42}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}$ $\quad\therefore\ (a,b,c)$ 為 $(2,3,7)$ 的排列：$3!=6$ 種。

2. 甲乙丙三人搭計程車，約定平均分攤計程車車資 (假定計費方式沒有起跳價，純以里程數計算)。甲在全部路程的三分之一處下車，乙在三分之二處下車，丙最後下車。若車資是 900 元，請問甲乙丙各分攤多少元才合理？

sol： $900\div 3=300$

甲：$\dfrac{1}{3}\times300=100$，乙：$\dfrac{1}{3}\times300+\dfrac{1}{2}\times300=250$，丙：$\dfrac{1}{3}\times300+\dfrac{1}{2}\times300+300=550$。