大學入學考試中心
107 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 **76** 分）

一、單選題（佔 **18** 分）

1. 設 A 為 3×3 矩陣，且對任意實數 a、b、c，$A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}$ 均成立。

   試問矩陣 $A^2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 為何？

   (1) $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$。 【107 數甲】

$\boxed{答}$：(2)

$\boxed{解}$：$A^2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

2. 坐標平面上，考慮 $A(2,3)$ 與 $B(-1,3)$ 兩點，並設 O 為原點。
   令 E 為滿足 $\overrightarrow{OP}=a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1\le a\le 1$，$0\le b\le 4$。
   考慮函數 $f(x)=x^2+5$，試問當限定 x 為區域 E 中的點 $P(x,y)$ 的橫坐標時，
   $f(x)$ 的最大值為何？
   (1) 5 (2) 9 (3) 30 (4) 41 (5) 54。 【107 數甲】

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$(x,y)=a(2,3)+b(-1,3)\xrightarrow{-1\le a\le 1,\,0\le b\le 4}-6\le x\le 2$，$-3\le y\le 15$

$f(x)=x^2+5\xrightarrow{0\le x^2\le 36}5\le x^2+5\le 41$

3. 某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A、B、C 三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A、B、C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為 $\frac{1}{4}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{2}$。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何？
   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{10}{23}$ (4) $\frac{10}{19}$ (5) $\frac{5}{9}$。 【107 數甲】

$\boxed{答}$：(3)

解：$\dfrac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{4}A+\frac{2}{5}A+\frac{1}{2}A}=\dfrac{10}{23}$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設 $f(x)=-x^2+499$，且

$A=\int_0^{10}f(x)dx$、$B=\sum\limits_{n=0}^{9}f(n)$、$C=\sum\limits_{n=1}^{10}f(n)$、$D=\sum\limits_{n=0}^{9}\dfrac{f(n)+f(n+1)}{2}$，

試選出正確的選項：

(1) A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$ 的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積

(2) $B<C$　(3) $B<A$　(4) $C<D$　(5) $A<D$。　【107 數甲】

答：(1)(4)

解：$A=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+499x+C\right]_0^{10}=\dfrac{13970}{3}\fallingdotseq 4656.6\cdots\cdots$

$B=-\dfrac{9\times10\times19}{6}+499\times10=4705$

$C=-\dfrac{10\times11\times21}{6}+499\times10=4605$

$D=\dfrac{B+C}{2}=4655$

故 $C<D<A<B$

5. 坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y=\log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a,b)$、$Q(c,d)$，且 $\overline{PQ}$ 的中點在 x 軸上，試選出正確的選項：

(1) L 的斜率大於 0　(2) $bd=-1$　(3) $ac=1$　(4) L 的 y 截距大於 -1

(5) L 的 x 截距大於 1。　【107 數甲】

答：(1)(3)(5)

解：$\because b+d=0$　$\therefore \log_2 a+\log_2 c=0\Rightarrow ac=1$

令 $P(t,s)$、$Q\left(\dfrac{1}{t},-s\right)$，其中 $t>1$，$s>0$

$$L：(y-s)=\frac{2s}{t-\frac{1}{t}}(x-t)\left\langle\begin{array}{l} x\text{ 截距 }\dfrac{t^2+1}{2t}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\geq\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}} \\ y\text{ 截距 }\dfrac{-t^2s-s}{t^2-1}=-1-\dfrac{s}{t^2-1}\leq-1 \end{array}\right.$$

6. 坐標空間中，有 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 四個向量，滿足外積 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}$，且 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的向量長度均爲 4。設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角爲 θ（其中 $0\leq\theta\leq\pi$），試選出正確的選項：

(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　(2) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張出的平行六面體的體積爲 16

(3) $\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 兩兩互相垂直　(4) $\vec{d}$ 的長度等於 4　(5) $\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角等於 θ。　【107 數甲】

答：(2)(3)

解：(1)$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\left|\vec{c}\right|\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(2)所求體積$=\underbrace{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}_{\text{底面積}}\underbrace{\left|\vec{c}\right|\sin 90^\circ}_{\text{高}}=4\times4\times1=16$

(3)$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$表$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}$表$\vec{d}\perp\vec{a}$且$\vec{d}\perp\vec{c}$

(4)$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{d}\right|\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\sin 90^\circ=\left|\vec{d}\right|\Rightarrow\left|\vec{d}\right|=16$

(5)應爲$\dfrac{\pi}{2}+\theta$或$\dfrac{3\pi}{2}-\theta$

7. 設O爲複數平面上的原點，並令點A、B分別代表複數z_1、z_2，且滿足$\left|z_1\right|=2$，$\left|z_2\right|=3$，$\left|z_2-z_1\right|=\sqrt{5}$。若$\dfrac{z_2}{z_1}=a+bi$，其中$a$、$b$爲實數，$i=\sqrt{-1}$，試選出正確的選項：

(1)$\cos\angle AOB=\dfrac{2}{3}$　(2)$\left|z_2+z_1\right|=\sqrt{23}$　(3)$a>0$　(4)$b>0$

(5)設點C代表$\dfrac{z_2}{z_1}$，則$\angle BOC$可能等於$\dfrac{\pi}{2}$。【107 數甲】

答：(1)(3)(5)

解：(1)$\cos\angle AOB=\dfrac{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left|z_2-z_1\right|^2}{2\times\left|z_1\right|\times\left|z_2\right|}=\dfrac{2^2+3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{2\times2\times3}=\dfrac{2}{3}$

(2)$\cos\left(\pi-\angle AOB\right)=\dfrac{\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left|z_2+z_1\right|^2}{2\times\left|z_1\right|\times\left|z_2\right|}=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left|z_2+z_1\right|=\sqrt{21}$

(3)(4)$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3}{2}\left(\cos\theta\pm i\sin\theta\right)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}i\right)=1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$

(5)因爲$Arg\left(z_1\right)$、$Arg\left(z_2\right)$未確定，故有可能

8. 設$f\left(x\right)$爲一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)\dfrac{|x|}{x}$存在，試選出正確的選項：

(1)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$存在　(2)$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)\dfrac{x}{|x|}$存在　(3)$\lim\limits_{x\to0}\left(f\left(x\right)+1\right)\dfrac{x}{|x|}$存在

(4)$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$存在　(5)$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)^2$存在。【107 數甲】

答：(1)(2)(5)

解：(1)$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1\right)^2=1$、$\lim\limits_{x\to0^-}\left(-1\right)^2=1$，故$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=1$

(2)$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)\dfrac{x}{|x|}$，正確

(3)必須 $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)$存在才成立

(4)無法確定

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}\times\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}\times f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$

三、選填題（佔 18 分）

A. 坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0,-5)$，其圓心在 $x=2$ 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦長爲 6，則其半徑爲________。(化爲最簡根式)　【107 數甲】

答：$\sqrt{13}$

解：圓心$(2,t)$，過$(2\pm3,0)$，$(0,-5)$

半徑 $r=\sqrt{(\pm3)^2+t^2}=\sqrt{2^2+(t+5)^2}\Rightarrow t=-2$

B. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p (其中 $0<p<1$)，且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X=k)$。已知 $p_4+p_5=\dfrac{45}{8}p_6$，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值________。(化爲最簡分數)　【107 數甲】

答：$\dfrac{18}{5}$

解：$C_4^9 p^4(1-p)^5+C_5^9 p^5(1-p)^4=\dfrac{49}{8}C_6^9 p^6(1-p)^3\Rightarrow p=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow E(X)=9\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{18}{5}$

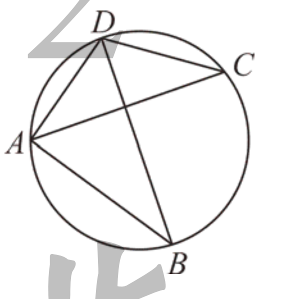
C. 設 A,B,C,D 爲圓上的相異四點。

已知圓的半徑爲 $\dfrac{7}{2}$，$\overline{AB}=5$，

兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，

如圖所示(此爲示意圖，非依實際比例)。

則 $\overline{CD}$ 的長度爲________。(化爲最簡根式)。



【107 數甲】

答：$2\sqrt{6}$

解：正弦定律 $\dfrac{5}{\sin\angle ADB}=2\times\dfrac{7}{2}\quad\Rightarrow\sin\angle ADB=\dfrac{5}{7}$

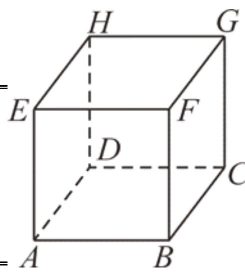
$\xrightarrow{\overline{AC}\perp\overline{BD}}\sin\angle CAD=\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{24}}{7}$

正弦定律 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2\times\dfrac{7}{2}\quad\Rightarrow\overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一. 坐標空間中有一正立方體 $ABCDEFGH$，如圖所示(此爲示意圖)，試回答下列問題。

(1)試證明 A 點到平面 BDE 的距離是對角線 AG 長度的三分之一。(4 分)



(2)試證明向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直。(2 分)

(3)如果知道平面 BDE 的方程式爲 $2x+2y-z=-7$，
且 A 點坐標爲 $(2,2,6)$，試求出 A 點到平面 BDE 的距離。(2 分)

(4)承(3)，試求出 G 點的坐標。(4 分) 【107 數甲】

答：(3) 3 (4) $(-4,-4,9)$

證：$A(0,0,0)$，$B(t,0,0)$，$D(0,t,0)$，$E(0,0,t)$，$G(t,t,t)$

平面 BDE：$x+y+z=t$，$d(A,BDE)=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$，$\overline{AG}=\sqrt{3}t$

故 $d(A,BDE)=\dfrac{1}{3}\overline{AG}$，平面 BDE 法向量 $\overrightarrow{N}=(1,1,1)$

證：$\overrightarrow{AG}=(t,t,t)//(1,1,1)=\overrightarrow{N}$，表 $\overrightarrow{AG}$ 垂直平面 BDE

解：$\dfrac{|4+4-6+7|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{9}{3}=3$

解：$A(2,2,6)$ 在 $2x+2y-z=-7$ 的投影點 $H(0,0,7)$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AH} \Rightarrow (x-2,y-2,z-6)=3(-2,-2,1) \Rightarrow G(x,y,z)=(-4,-4,9)$

二. 考慮三次多項式 $f(x)=-x^3-3x^2+3$，試回答下列問題。

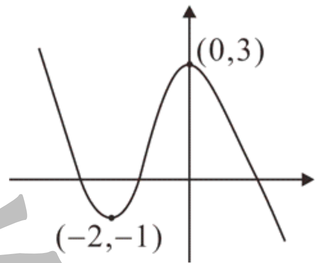
(1)坐標平面上，試描繪 $y=f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。(4 分)

(2)令 $f(x)=0$ 的實根爲 a_1,a_2,a_3，其中 $a_1<a_2<a_3$。
試求 a_1,a_2,a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。(2 分)

(3)承(2)，試說明 $f(x)=a_1$、$f(x)=a_2$、$f(x)=a_3$ 各有幾個相異實根。(4 分)

(4)試求 $f(f(x))=0$ 有幾個相異實根(註：$f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$)。
(2 分) 【107 數甲】

答：如詳解



解：(1) $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)\left\langle \begin{array}{l} f(-2)=-1 \\ f(0)=3 \end{array}\right.$

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

(2) $f(1)=-1$，$f(0)=3$，$f(-1)=1$，$f(-2)=-1$，$f(-3)=3$

由勘根定理得知，在區間 $(-3,-2)$，$(-2,-1)$，$(0,1)$ 內各有一實根

$\Rightarrow -3<a_1<-2<a_2<-1<0<a_3<1$

(3)故 $y=f(x)$ 與 $y=a_1$ 交於1點，表 $f(x)=a_1$ 有一實根

與 $y=a_2$ 交於1點，表 $f(x)=a_2$ 有一實根

與 $y=a_3$ 交於3點，表 $f(x)=a_3$ 有三實根

(4) $f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3)=0$

亦即 $f(x)=a_1$、$f(x)=a_2$、$f(x)=a_3$，承(3)，共有 5 個根