

臺北市立內湖高工 107 年教師甄選數學科試題

配分方式：填充題共 18 格，每格 5 分，證明題 10 分，滿分 100 分。

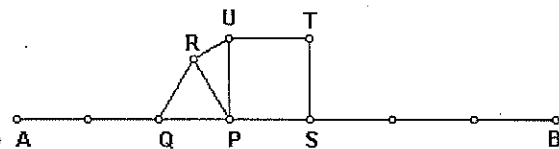
1. 對於每個正整數 x ，函數 $f(x)$ 有定義，且對任何兩個正整數 x 和 y ，滿足方程 $f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$ ；
如果 $f(1) = 2$ ；試求 $f(1993) =$ _____。

2. 設 n 是一個正整數，試求滿足方程式：

$$\frac{n^3-3}{n^3} + \frac{n^3-4}{n^3} + \frac{n^3-5}{n^3} + \cdots + \frac{5}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^3} = 169 \text{ 的 } n \text{ 值} = \text{_____}。$$

3. 在某入場券販賣處的窗口，在開始販賣前就形成購買入場券的行列，而在開始販賣時有 40 人。由於販賣後也以一定的比例聚集購買的人，因此在 1 個窗口，到這個行列消失要花 10 分鐘。再者，如果窗口有 2 個的話，這個行列祇要 4 分鐘就不見了。如果窗口為 3 個的話，這個行列需要_____分鐘才會消失呢？但在窗口賣入場券的時間，任何人都相同。

4. 如圖 \overline{AB} 是一條長 24 公分的鐵絲， P 是 \overline{AB} 上的一點，將 \overline{PB} 分為四等分，使其圍成一個正方形 $PSTU$ ；
 \overline{AP} 分為三等分，使其圍成一個正三角形 PQR ，問
 $\triangle RUP$ 的最大面積？



5. 同時投擲

(1) 四個相異的公正骰子，點數 3 出現至多一次的情形共有幾種？

(2) 四個相同的公正骰子，點數 3 出現至多一次的情形共有幾種？ _____

6. 點 $P(-1, 2)$ 及雙曲線 $3x^2 - 4y^2 = 12$ ，若過 P 的直線與雙曲線交於相異兩點，求此直線的斜率 m 的範圍。

7. 一圓形跑道上有 A, I, T 三地點，一賽車自 A 出發，經 I 再經 T 環繞跑道，然而賽車在 I、T 處的故障率分別為 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{21}$ ，求賽車環繞跑道的圈數期望值為何？

8. $1999^{2000^{2110}}$ 被 7 除的餘數為何？

9. 已知五個實數 a, b, c, d, e 滿足 $a+b+c+d+e=8$ ， $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ ，求 e 的最大值為何？

10. 求 $\frac{2\sin\theta+1}{3+\cos\theta}$ 的最小值 _____

11. 解不等式 $\sqrt{25-x^2} > 1-x$

12. 設函數 $f(x) = \frac{(x+2)(2x+1)}{(x+1)^2}$ ， $x \geq 1$ ，求 $f(x)$ 之最大值 _____

13. 解 $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x + 1}$

14. 三角形三邊長為正整數， $\angle A=2\angle B$ ， $\angle C > 90^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 周長最小值_____

15. 若 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ ， $n \in N$ ，則 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n =$ _____

16. 已知函數 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 與函數 $g(x) = |2x+1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b ，其中 $a < b$ 。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 上的最小值分別為 s 與 t ，則 $s+t =$ _____

17. (1) 右下圖的圓 O 中， \overline{AB} 是直徑， O 為圓心， $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 2$ ， D 為 \overline{OC} 上一點且 $\overline{OD} = 1$ ， \overline{DE} 平分 $\angle ODA$ 交 \overline{AB} 於 E 點，過 E 作 \overline{AB} 的垂線交半圓於 F 點，求 \overline{AF} 之長為何？_____

(2) 求證： \overline{AF} 為正五邊形 $AFKLM$ 的邊長。

