

臺北市立松山高級工農職業學校 107 學年度第 1 次教師甄選

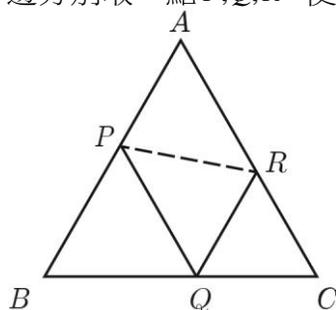
【數學科】初試試題

作答說明：

1. 請在答案卷上標明題號依序作答。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時間 90 分鐘。
4. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

一、填充題(不需要寫算式，每題 5 分)

1. 在三角形 ABC 中 $\overline{AB} = 50$ 、 $\overline{AC} = 10$ 且其面積為 120。設點 D 為 \overline{AB} 的中點，點 E 為 \overline{AC} 的中點， $\angle BAC$ 的角平分線分別交 \overline{DE} 與 \overline{BC} 於點 F 與點 G 。試問四邊形 $FDBG$ 的面積為多少_____。
2. $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O 之單位圓。若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \sqrt{3}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ ，則 $\triangle ABC$ 面積=_____。
3. 在坐標平面上以 Ω 表曲線 $y = x - \frac{1}{2}x^2$ 與直線 $y = 0$ 所圍的有界區域。若直線 $y = cx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值_____。
4. 設點 $B(-2,2)$ 、 $C(2,8)$ 為坐標平面上兩點，且點 A 在二次函數 $y = x^2$ 的圖形上變動。則內積 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 最小值=_____。
5. 直六角柱的高為 4，兩底為邊長是 2 的正六邊形；12 個頂點中任意 3 個頂點可以決定一個三角形。試問這些三角形中有_____個是等腰三角形(包含正三角形)？
6. 將一塊邊長 $\overline{AB} = a$ 公分 ($a > 0$)、 $\overline{BC} = b$ 公分 ($b > 0$) 的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 \overline{BD} 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，則 A 、 C 兩點 (在空間) 的距離 $\overline{AC} =$ _____。
7. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P, Q, R ，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示：



若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $18\sqrt{3}$ ，則線段 PR 的長度為_____。

8. 坐標平面上，令 R 表由 x 軸、 y 軸及直線 $L: 3x + 4y = 48$ 所圍成之三角形區域(含邊界及內部)。若點 P 屬於 R ，且 d_1 、 d_2 、 d_3 分別表示 P 點至 x 軸、 y 軸及 L 之距離，則 $d_1 + d_2 + d_3$ 之最大值為_____。
9. 試求 $18^{15} + 20^{15}$ 除以 361 的餘數為_____。
10. 設 n 為正整數，若 n^3 的末三位數字為 888，則 n 最小值為_____。
11. 四面體 $ABCD$ 中，底面 $\triangle BCD$ 為邊長 6 的正三角形，而 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 9$ ，則直線 AB 與直線 CD 的距離為_____。
12. 設二次曲線 $\Gamma: 4x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ ，以矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ 對 Γ 作線性變換得 Γ' ，即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，其中 a 為實數， $(x, y) \in \Gamma$ ， $(x', y') \in \Gamma'$ ，則當 Γ' 與 x 軸相切時， $a =$ _____。
13. 設實數 x 滿足 $\log_{5x+4}(x^2 + 4x + 4) + \log_{x+2}(5x^2 + 14x + 8) = 4$ ，則 x 的最小值為_____。

14. 令 $a_1 = \sqrt{5} + 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ($n=1,2,3,\dots$)。若此數列 $\{a_n\}$ 中前 60 項的總和為 a , 前 60 項的乘積為 b , 則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 函數 $y = \frac{1}{\pi}x^2$ 之圖形與函數 $y = \frac{\pi}{4}\sin x$ 之圖形所圍成區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、問答題(每題 5 分)

以下是本校學生解題時常犯的錯誤, (1)請寫出錯誤之處及正確觀念為何?(2 分)

(2)寫出正確答案(3 分, 不需要寫算式)。

1. 求 $x^4 - 4x^2 - 5x - 12$ 除以 $x-3$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

甲同學的算式為:

利用綜合除法

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 & -4 & -5 & -12 \\ & +3 & -3 & -24 & \\ \hline & 1 & -1 & -8 & -36 \end{array}$$

餘式為 -36

2. 9 個相同的球放入不同的 3 個箱子, 每個箱子至少 2 個的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

乙同學的算式為:

分子: 每個箱子先放 2 個球, 剩 3 個球隨意放入 3 個箱子中, $H_3^3 = C_3^5 = 10$ 。

分母: 9 個球隨意放入 3 個箱子中, $H_9^3 = C_9^{11} = 55$

機率 $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$

3. 方程式 $(2x + y - 7)^2 + (x - 3y + 7)^2 = 0$ 的圖形為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

丙同學的算式為:

平方相加為 0, 圖形為 $2x + y - 7 = 0$ 和 $x - 3y + 7 = 0$ 兩直線

4. 已知 $f'(a) = 3$, 則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

丁同學的算式為:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = f'(a) = 3$$

5. 1 號到 8 號 8 位同學排成一排, 若號碼為質數的同學任兩人均不相鄰, 且號碼為質數的同學必須由左至右由小排到大, 則共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種排列情形。

戊同學的算式為:

先將質數由左至右由小排到大 2,3,5,7

再將剩餘數字 1,4,6,8 隨意插入空格中

$\square 2 \square 3 \square 5 \square 7$ 或 $2 \square 3 \square 5 \square 7 \square$

$4! = 24$ 種

$4! = 24$ 種

總共 48 種