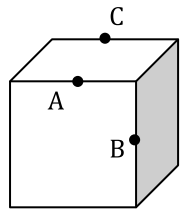
嘉義高中 105 學年度 科學班 第二階段 數學科 實作評量 試題卷

一、單選題 (每題 5 分，共 10 分)

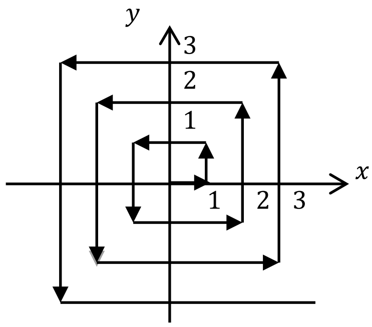


1. 右圖為一正立方體，A、B、C 分別為所在的邊之中點，通過 A、B、C 三點的平面與此立方體表面相截，問下列何者為其截痕的形狀？(A)直角三角形 (B)非直角三角形 (C)正方形 (D)非正方形的長方形 (E)六邊形。

2. 空間中，下列敘述何者正確？(A)通過相異三點，恰有一平面存在 (B)一線與一點決定唯一平面 (C)通過相異兩點，恰有一直線存在 (D)若二相異直線決定唯一的平面，則此二直線必交於一點 (E)若二直線不相交，則必平行。

二、多重選擇題(每題 5 分，每答對一個選項給一分，答錯不倒扣，沒作答得零分，共 10 分)

1. 在坐標平面上，x,y坐標均為整數的點叫格子點。依右圖所示的順序，每次走一步(一步為一單位)，假設小明從$(0,0)$出發，則下列敘述哪些正確?



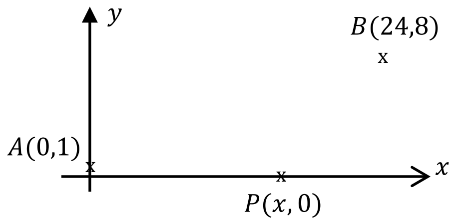
(1)他走 10 步，停在第一象限
(2)他走 101 步，停在第二象限
(3)他走到$(7,7)$，共走 182 步
(4)他走到$(-10,-10)$，共走 420 步
(5)他走 500 步，共轉彎 44 次

2. 酒仙李白，醉後的步法為每秒鐘前進或者後退一步，每次以前進 3 步，然後後再後退 2 步的規律移動。如果李白在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長。令$P(n)$表示第n秒時李白所在位置的坐標，且$P(0)=0$。則下列選項何者為真?

(1)$P(3)=3$；(2) $P(5)=1$；(3) $P(10)=2$；(4) $P(105)=21$；(5) $P(2015)<P(2016)$。

三、填充題(每題 5 分，共 70 分)

1. 設實數 x,y,z 滿足 $\begin{cases}2x-3y+4z=0\\3x+\ \ y-2z=0\end{cases}$ 且 $xyz\neq 0$，則 $\dfrac{z}{x+y}$ =__________。

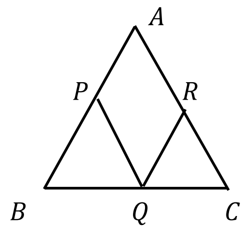


2. 設平面上有兩點 $A(0,1),B(24,8)$，若點 P 為 x 軸上一動點，如右圖所示，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為____________。

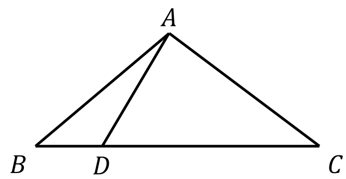
3. 已知A、B、C、D四點共平面，但任三點不共線，而P在平面$ABCD$外，試問A、B、C、D、P 五點一共可決定 _______個不同的平面。

4. 由於”林來瘋”現象，嘉中籃球隊以不連續兩球投籃不進的目標來練習投籃，則連續 10 球投球中進球的情形共有________種。

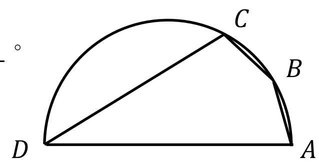
5. 在邊長為 13 的正三角形ABC上各邊分別取一點P, Q, R，使得$APQR$形成一平行四邊形，如右圖所示，若平行四邊形$APQR$的面積為$20\sqrt{3}$，則線段$\overline{PR}$的長度為________。



6. 如右圖所示，ΔABC中，D為$\overline{BC}$上一點，且$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=2$，則$\overline{CD}=$ ________。



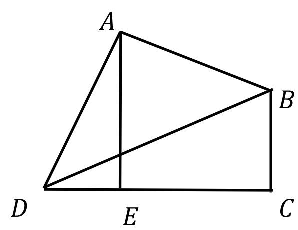
7. 如右圖，若B, C為半圓上兩點，直徑$\overline{AD}=25$，$\overline{AB}=\overline{BC}=7$，則 $\overline{AC}=$__________。



8. 設x為正整數，試求 $\frac{3x}{x^2+2}$ 為正整數的所有可能的x的值________。

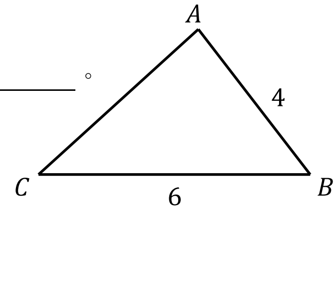
9. 設$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\ (-2\le x\le 4)$，則函數$f(x)$與$x$軸的交點座標為_________。

10. 設$[x]$表小於或等於 x 的最大整數，如 $[-2.1]=-3, [0.5]=0, \cdots$。 則滿足 $[x]^2-[x-4]-6=0$ 的所有實數 x 的範圍為_________。



11. 如右圖所示，已知$\angle BAD=\angle BCD=90°$，且$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{AE}\perp\overline{CD}$。若四邊形$ABCD$的面積為 16，則 $\overline{AE}=$ ________。

12. 如右圖所示，已知ΔABC中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，且$\angle A=2\angle C$，則 $\overline{AC}$=_________。



13. 設$\sqrt{17+\sqrt{288}}=n+x$，其中n為正整數，$0 \le x < 1$，即 x 為$\sqrt{17+\sqrt{288}}$的正小數部分。則 $\sqrt{\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}=$ ________。

14. 已知在O處有一艘郵輪往正東方向航行 12 公里到達B處，並測得燈塔A在正北方 5 公里處後，再繼續往正東航行到某點 C 處，得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}}$ 有最小值為 a，且此時的$\overline{OC}=b$公里，則數對 (a,b)=__________。

三、計算題(共 10 分)

1. (a) 下圖(1)的三角形中第一列有 1 個 1，第二列有 2 個 2，以此類推到第n列有n個n。將此圖逆時針旋轉$60°$後會得到圖(2)的三角形，然後將圖(2)逆時針旋轉$60°$後會得到圖(3)的三角形。觀察到三角形(1)、(2)、(3)的頂點和為$1+n+n=2n+1$，三角形(1)、(2)、(3)的左下端點與右下端點和分別為 $n+1+n=2n+1$、$n+n+1=2n+1$。試據此推論：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。(6 分)

(1)

1
2 2
3 3 3
⋰ ⋱
n ⋯ n

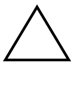
(2)

n
⋰
3 ⋱
2 3
1 2 3 n

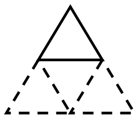
(3)

n
⋱
⋰ 3
3 2
n ⋯ 3 2 1

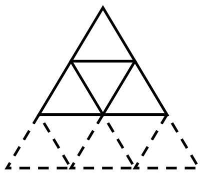
(b) 一個邊長為n的大正三角形中，共有a_n個單位正三角形(如下圖所示，其邊長依序為 1,2,3,⋯之正三角形)。求$a_1+a_2+\cdots a_{105}$。(4 分)



$a_1=1$



$a_2=a_1+3$



$a_3=a_2+5$

……