一、 教學基礎知能(50%)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得　　分	6	12	18	24	27	30	33	35	38	40	42	44	46	48	50

1. 已知正實數 a、b、c 滿足 $a+b+c=1$，則 $a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$ 的最大值為____________。

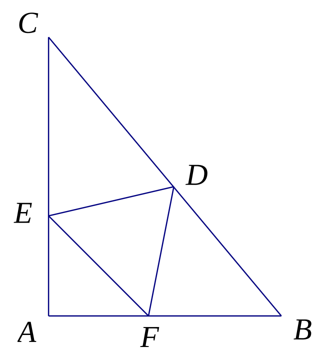
2. 在 ΔABC 中，頂點 A、B、C 的對邊分別為 a、b、c。已知 $c=10$ 且 $\operatorname{Cos} A:\operatorname{Cos} B=a:b=4:3$，
   若 P 為 ΔABC 內切圓上的動點，求 P 點到三頂點距離平方和的最大值為____________。

3. 定義在 R 上的函數 $f(x)$，對任意的實數 x 均有 $f(x+3)\le f(x)+3,\ f(x+2)\ge f(x)+2$，且 $f(1)=2$。
   記 $a_n=f(n)$，$n\in N$ ，則 $f(2017)=$____________

4. D、E、F 分別在 ΔABC 的 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 邊上，滿足 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\lambda$。
   又 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 圍出 ΔLMN，求兩三角形的面積比 $\frac{\Delta LMN}{\Delta ABC}$ 為為____________

5. 求 $1\times3\times5\times7+3\times5\times7\times9+5\times7\times9\times11+\cdots+29\times31\times33\times35$ 之值為____________

6. 空間中有相異 8 個點，其中任 3 點不共線，任 4 點不共平面，將每二點連成一直線，可以形成_________對歪斜線。



圖(一)

7. 如右圖(一)，有一個直角 ΔABC 的三邊長分別為 $2\sqrt{3}$、5、$\sqrt{37}$，
   若正 ΔDEF 的頂點分別在 ΔABC 的三邊上，求正 ΔDEF 面積的最小值為_________。

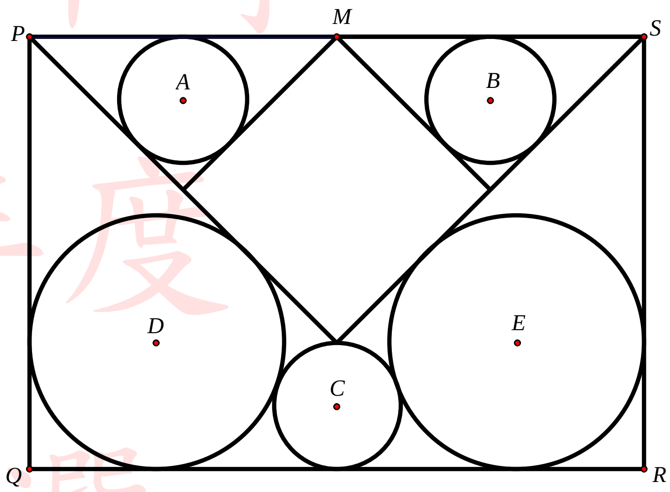
8. 如果一個正整數的立方的末三位為 999，則稱這樣的數為「久違數」，
   試求第二小的「久違數」是__________。

9. 如右圖(二)所示，倒三角形陣列的最頂層的一列是由奇數$1,3,5,\cdots,99$依遞增之方式排成的。第一列以下的每一列都比它緊鄰上方的一列少一個數，最底層的一列只有一個數。在最頂層之下每一列中的每一個數，是它緊鄰上方一列對角兩個數的和。在此陣列中有多少個數是 67 的倍數？ 答：________個

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & \cdots & 97 & 99 \\ & 4 & 8 & 12 & \cdots & 196 \\ & & & \vdots & & \end{array}$$

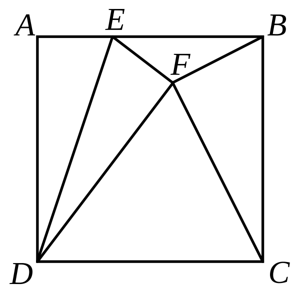
圖(二)

10. 如右圖(三)，從長方形 $PQRS$ 的長邊 $\overline{PS}$ 往內，作三個等腰直角三角形，其中 M 為中點，且有五個內切於各邊長的圓 A,B,C,D,E，其中圓 C 過最大等腰直角三角形的頂點，試求這五個圓 A,B,C,D,E 的半徑比為____________。



圖(三)

11. 如右圖(四)，正方形 $ABCD$，E 為 $\overline{AB}$ 上一點，若 A 關於 $\overline{DE}$ 之對稱點為 F，且 $\angle BFC = 90^\circ$，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} =$____________。



圖(四)

12. 設實係數多項式 $P(x)$ 滿足 $(x+3)(x^2+2x+2)P(x)=(x-3)(x^2-2x+2)P(x+2)$，試求所有可能的 $P(x)$ 為____。

13. 設 O 為平面坐標的原點，A, B 兩點皆為格子點（x, y 坐標皆為整數的點）。已知 ΔOAB 的內心坐標為 $I(106\times 2017, 7\times 106\times 2017)$，且 $\angle AOB$ 為直角。試問：這樣的三角形有幾_________個。

14. 已知 x,y,z,u,v,w 均為正整數，且

$$334(xyzuvw+xyzu+xyzw+xyvw+xuvw+xy+xu+xw+zuvw+zu+zw+vw+1)$$
$$=6597(yzuvw+yzu+yzw+yvw+uvw+y+u+w)$$

求 $x+y+z+u+v+w$ 之值為_________。

15. $u\ge 0, v\ge 0$，求 $(u-v)^2+\left(\sqrt{1-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2$ 之最小值為____________

二、 基本理論證明(20%)

16. 試證 $y=x^2$ 的圖形上的點在一拋物線上。

17. 試證明：雙曲線上一點至兩漸近線的距離乘積為一定值。

18. 令 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 a、b、c 均為整數。試證明：若可找到一個有理數 p 使 $f(p)=0$，則 a、b、c 三數中至少有一個是偶數。

19. 試證明：點 $P(x_0\ ,y_0)$ 到直線 $L:ax+by+c=0$ 之距離 $d(P,\ L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (僅能使用高一學生會的方法證明之)

三、 課程設計(30%)

20.

有一天老師出了一道試題：已知 a、b 均為正數，求 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+9b\right)$ 的最小值為何？

同學甲是這樣回答的： $\because a+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\times\dfrac{1}{b}}$ 且 $\dfrac{4}{a}+9b\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{a}\times 9b}$

$\therefore\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+9b\right)\geq 2\sqrt{a\times\dfrac{1}{b}}\times 2\sqrt{\dfrac{4}{a}\times 9b}=24$ 得最小值為 24

同學乙是這樣回答的： $\because\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+9b\right)=4+9ab+\dfrac{4}{ab}+9\geq 13+2\sqrt{9ab\times\dfrac{4}{ab}}=25$ $\therefore$ 最小值為 25

同學甲和乙一起向老師回答，然後看著老師等著回應。

試利用上述情境回答下列問題：

(1) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+9b\right)$ 的最小值為________

(2) 甲、乙二人至少有一人答錯，請指出誰算錯了，以及這個人的錯誤之處。

請利用上述文本，設計大約 20 分鐘的課程，引導學生思考甲、乙兩人到底誰錯了？ (5%)

請詳述您的教學策略，特別是在課程設計中融入以學習者為中心的《體驗式課程設計》。 (5%)

若時間允可，請一併詳述您會如何利用這個文本來進行課室內的差異化教學。 (5%)

21. 如果您有幸獲聘為本校數學科專任教師，並獲校長邀約兼任行政工作，以「教學組長」一職為例，其最重要的工作項目為全校教師課表的安排。在課表安排之前，教務主任提供如下資料：已知本校校舍分為育善樓、進德樓、修業樓及致真樓等四棟建築主體。目前有普通教室 58 間、專科教室 26 間、電腦教室 3 間、視聽教室 1 間、會議室 2 間、圖 1 座、活動中心 1 間及辦公室 30 間。

107 學年度預計班級與學生人數		
	班級數	學生人數
高中部	33 班	1076 人
國中部	10 班	235 人

請問，在 108 新課綱的架構之下，本校一共需要

(1) 多少位教師？ (5%)

(2) 其中高中部國文、英文、數學、物理、化學、生物、地球科學、歷史、地理、公民、資訊、綜合活動等學科各需要多少位教師？ (5%)

(3) 在每天七節課合計一週共 35 節課程中，必須如何安排校本必修課程，多元選修課程與彈性學習時數？請試著利用數學建模(*Mathematical Modeling*)的精神估算學校的教室是否足以使用？如果不夠，可以嘗試用什麼方法來解決？ (5%)

臺北市立西松高級中學 107 學年度教師甄選 數學科試題參考答案

第一部分 參考簡答

1. $\frac{5}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{9}$　2. 88　3. 2018　4. $\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}$　5. 3,841,887　6.210　7. $\frac{75\sqrt{3}}{67}$　8. 1999　9. 17　10. 1:1:1:2:2

11. $\frac{1}{3}$　12. $P(x)=c(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)$　13. 36　14. 40　15. $19-6\sqrt{2}$

參考詳解

1. $\because b+\frac{1}{4}\ge\sqrt{b}$ 且 $c+\frac{2}{3\sqrt{3}}=c+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge 3\sqrt[3]{c(\frac{1}{3\sqrt{3}})^2}=\sqrt[3]{c}$　$\therefore$　$a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}\le a+b+\frac{1}{4}+c+\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{9}$

   等號成立之條件為 $a=\frac{3}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}$、$b=\frac{1}{4}$、$c=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

2. 令 $a=4k$、$b=3k$ 則 $\frac{10}{7}<k<10$ (三角形邊長和差)。由正弦定理知 $a:b=\sin A:\sin B=\cos A:\cos B=4k:3k$ 得 ΔABC 為邊長

   8、6、10 之直角三角形得 $r=2$。可訂內切圓為 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$，$P(x,y)$ 在圓上，則至三頂點距離平方和為

   $(x-8)^2+y^2+x^2+(y-6)^2+x^2+y^2=88-4x\le 88$

3. $f(x)+3\ge f(x+3)=f(x+1+2)\ge f(x+1)+2$，可知 $f(x)+1\ge f(x+1)$
   又 $f(x)+4\le f(x+2)+2\le f(x+4)=f(x+1+3)\le f(x+1)+3$，可知 $f(x+1)\ge f(x)+1$ 故 $f(x+1)=f(x)+1$，
   因此 $f(2017)=2018$

4. 令 $\Delta ABC=1$，對 ΔBFC 與 $\overline{AD}$ 使用孟氏定理得 $\frac{BD}{DC}\frac{CL}{LF}\frac{FA}{AB}=1$，故 $\frac{CL}{LF}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{\lambda+1}{\lambda^2}$　得　$\frac{CL}{CF}=\frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}$

   $\Delta CLA=\frac{CL}{LF}\Delta AFC=\frac{CL}{CF}\frac{AF}{FB}\Delta ABC=\frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$

   同理 $\Delta BNC=\Delta AMB=\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}$　故　$\Delta LMN=\Delta ABC-\Delta CLA-\Delta BNC-\Delta AMB=1-\frac{3}{\lambda^2+\lambda+1}=\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}$

5. $(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)=(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)\frac{\left[-(2k-3)+(2k+7)\right]}{10}$

   $=\frac{1}{10}\left[-(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)+(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\right]$

   $\sum_{k=1}^{15}(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)$

   $=\frac{1}{10}\left[-(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)\big|_{k=1}+(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)(2k+7)\big|_{k=15}\right]$

   $=\frac{1}{10}\left[-(-1)(1)(3)(5)(7)+(29)(31)(33)(35)(37)\right]$=3,841,887

6. $\frac{C^8_4C^4_2}{8}=210$

7. 假設 $A(0,0)$、$B(2\sqrt{3},0)$、$C(0,5)$、$F(a,0)$、$E(0,b)$，則 $\overline{EF}$ 中點為 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$，$\overline{EF}$ 的法向量為 $(\frac{\sqrt{3}b}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2})$，

   故 $D(\frac{a+\sqrt{3}b}{2},\frac{\sqrt{3}a+b}{2})$ 而 D 在 $5x+2\sqrt{3}y=10\sqrt{3}$ 上，故 $5(\frac{a+\sqrt{3}b}{2})+2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}a+b}{2})=10\sqrt{3}$　整理得　$11a+7\sqrt{3}b=20\sqrt{3}$

   由柯西不等式：$[11^2+(7\sqrt{3})^2](a^2+b^2)\ge(11a+7\sqrt{3}b)^2=(20\sqrt{3})^2$ 得　$a^2+b^2\ge\frac{300}{67}$ 故 ΔDEF 面積的最小值為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{300}{67}=\frac{75\sqrt{3}}{67}$

8. 假設久違數為 x，則 $x^3=1000k+999\Rightarrow x^3+1=1000(k+1)\Rightarrow(x+1)(x^2-x+1)=1000(k+1)$
   $\because x^3$ 為奇數　$\therefore$ x 為奇數 $\Rightarrow x+1$ 為偶數、x^2-x+1 為奇數

   故，可設 $x+1=8m$ (m 為正整數) $\Rightarrow$ $m(x^2-x+1)=125(k+1)$　接下來證明 x^2-x+1 不是 5 的倍數

   (1) 若 $x=5t$，則 $x^2-x+1=25t^2-5t+1$　　(2) 若 $x=5t+1$，則 $x^2-x+1=5t(5t+1)+1$

(3) 若 $x=5t+2$，則 $x^2-x+1=25t^2+15t+3$　(4) 若 $x=5t+3$，則 $x^2-x+1=25t^2+25t+7$

(5) 若 $x=5t+4$，則 $x^2-x+1=25t^2+35t+13$　可見 x^2-x+1 不是 5 的倍數　可得 $m=125n \Rightarrow x+1=100n$

當 $n=1$ 時，$x=999$ 最小；當 $n=2$ 時，1999 為第二小的久違數

9. (方法 1) 設第 n 列的一般項為 a_n，則 $a_n=2^{n-1}(2k_n+n)$，且 $0\le k_n\le 50-n$

如第 1 列的一般項為 $a_1=2k_1+1$，$0\le k_1\le 49$、第 2 列的一般項為 $a_2=2(2k_2+2)$，$0\le k_2\le 48$、

第 3 列的一般項為 $a_3=2^2(2k_3+3)$，$0\le k_3\le 47$

依題意，$a_n=67m$，$m\in N$　得　$a_n=2^{n-1}(2k_n+n)=67m$，且 $0\le k_n\le 50-n$ $\Rightarrow$ $2k_n+n=67$，且 $0\le k_n\le 50-n$

$\Rightarrow 2k_n+n\le 100-n$，$67\le 100-n \therefore n\le 33$，又 n 為奇數 $\Rightarrow$ $n=1,3,5,\cdots,33$ 共 17 個

(方法 2) 以第 1 列的 67 為基準，定義為 0，則第 1 列的各項為 $-66,-64,-62,-60,\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots,32$

依陣列的運算規則得 第 2 列的各項為 $-130,-126,-122,-118,\cdots,-10,-6,-2,2,6,\cdots,62$

第 3 列的各項為 $-256,-248,-240,-232,\cdots,-16,-8,0,8,16,\cdots,120$

依此類推，只要有出現“0”者的項，即為 67 的倍數　而且只有在第 1、3、5、7、9、…、33 列才會出現“0”者的項

故共有 17 個數為 67 的倍數

10. 不失一般性，令矩形之長為 1　圓 A、C、E 之半徑分別為 r_A,r_C,r_E

(1) 由圓 A 中，$r_A+\sqrt{2}r_A=\dfrac{1}{4}$，得 $r_A=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$

(2) 在圓 C、E 中，由外公切線長，可得 $\dfrac{1}{2}=\sqrt{(r_E+r_C)^2-(r_E-r_C)^2}+r_E=2\sqrt{r_Cr_E}+r_E$　(*)

又由長方形寬的等量關係，可得 $(1+\sqrt{2})r_E\times\sqrt{2}=(\dfrac{1}{2}+2r_C)$　　$\therefore r_C=(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})r_E-\dfrac{1}{4}$ 代入上式(*)

得 $\dfrac{1}{2}=2\sqrt{(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})r_E^2-\dfrac{r_E}{4}}+r_E$　　$\therefore r_E^2=\dfrac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$，即 $r_E=\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}=2r_A$ $\Rightarrow$ $r_C=(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}=r_A$

$\therefore$ $r_A:r_B:r_C:r_D:r_E=1:1:1:2:2$

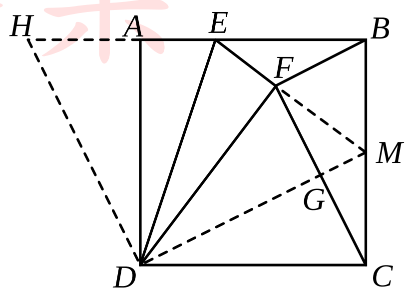
11. 如右下圖，延長 $\overline{EF}$ 交 $\overline{BC}$ 於 M，連接 $\overline{DM}$，與 $\overline{CF}$ 交於 G　則易得 $\triangle DFM\cong\triangle DCM$，得 $\overline{CG}=\overline{GF}$，又 $\angle BFC=90^\circ$

$\therefore$ $\overline{GM}//\overline{BF}$ 且 $\overline{GM}=\dfrac{1}{2}\overline{BF}$，則 M 為 $\overline{BC}$ 中點 $\therefore$ $\angle EDM=\angle EDF+\angle FDM=\dfrac{1}{2}(\angle ADF+\angle FDC)=45^\circ$

將 $\triangle MDC$ 以 D 為中心逆時針旋轉 90°，得到 $\triangle HAD$，則 $\triangle MDE\cong\triangle HDE$

故 $\overline{EM}=\overline{HE}=\overline{AE}+\overline{MC}$，又設正方形邊長為 1，$\overline{AE}=x$

$\because$ $\overline{EB}^2+\overline{BM}^2=\overline{EM}^2$，得 $(1-x)^2+(\dfrac{1}{2})^2=(x+\dfrac{1}{2})^2\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$



12. 因為 $P(3)=P(1)=P(-1)=P(1\pm i)=0$，所以設 $P(x)=(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)Q(x)$

可得 $P(x+2)=(x-1)(x+1)(x+3)(x^2+2x+2)Q(x+2)$，由 $(x+3)(x^2+2x+2)P(x)=(x-3)(x^2-2x+2)P(x+2)$

得 $(x+3)(x^2+2x+2)(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)Q(x)=(x-3)(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)(x+3)(x^2+2x+2)Q(x+2)$

可知 $Q(x)=Q(x+2)$，若 $\deg Q(x)>1$，則方程式 $Q(x)=0$ 會有無限多個根，得 $Q(x)=c$，

故 $P(x)=c(x-3)(x-1)(x+1)(x^2-2x+2)$

13. 不失一般性，假設 A 點在第一象限，則 B 點在第二象限。設 $\overline{OA}$ 與 x 軸正向的夾角為 α、$\overline{OI}$ 與 x 軸正向的夾角為 β

($\tan\beta=7$)，$\angle AOI=45^\circ$。$\tan\alpha=\tan(\beta-45^\circ)=\dfrac{\tan\beta-1}{1+\tan\beta}=\dfrac{3}{4}$，故設 $A(4t,3t)$，則 $B(-3s,4s)$，其中 t,s 皆為自然數。

則 ΔOAB 的內切圓半徑 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{OI}=5\times106\times2017$。

因為 $\overline{OA}=5t, \overline{OB}=5s$ ，得 $\overline{AB}=(5t-r)+(5s-r)=5t+5s-2r$ 。

由畢氏定理得 $(5t+5s-2r)^2=(5t)^2+(5s)^2 \Rightarrow 2r^2-10rt-10rs+25st=0$

$\Rightarrow st-2ks-2kt+2k^2=0 \Rightarrow (s-2k)(t-2k)=2k^2=2^3\times 53^2\times 2017^2$ ，其中 $k=106\times 2017=2\times 53\times 2017$ ，故有 36 組解。

14.

$$\frac{xyzuvw+xyzu+xyzw+xyvw+xuvw+xy+xu+xw+zuvw+zu+zw+vw+1}{yzuvw+yzu+yzw+yvw+uvw+y+u+w}$$

$$=x+\frac{zuvw+zu+zw+vw+1}{yzuvw+yzu+yzw+yvw+uvw+y+u+w}$$

$$=x+\frac{1}{\dfrac{yzuvw+yzu+yzw+yvw+uvw+y+u+w}{zuvw+zu+zw+vw+1}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{uvw+u+w}{zuvw+zu+zw+vw+1}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{\dfrac{zuvw+zu+zw+vw+1}{uvw+u+w}}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{vw+1}{uvw+u+w}}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{\dfrac{uvw+u+w}{vw+1}}}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{u+\dfrac{w}{vw+1}}}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{u+\dfrac{1}{\dfrac{vw+1}{w}}}}}$$

$$=x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{u+\dfrac{1}{v+\dfrac{1}{w}}}}}$$

故 $xyzuvw=2014168 \Rightarrow x+y+z+u+v+w=20+1+4+1+6+8=40$

15. $(x,y)=(u,\sqrt{1-u^2}) \Rightarrow x^2+y^2=1, y\ge 0$ (圓)　　$(x,y)=(v,\frac{9}{v}) \Rightarrow xy=9$ (雙曲線)　　所求 $=(\overline{OQ}-\overline{OP})^2=(3\sqrt{2}-1)^2=19-6\sqrt{2}$

16. $y=x^2 \Rightarrow y^2+y=x^2+y^2 \Rightarrow y^2+\frac{1}{2}y=x^2+y^2-\frac{1}{2}y \Rightarrow (y+\frac{1}{4})^2=x^2+(y-\frac{1}{4})^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-\frac{1}{4})^2}=\frac{|y+\frac{1}{4}|}{\sqrt{1}}$,

設 $P(x,y)$， $F(0,\frac{1}{4})$， L： $y+\frac{1}{4}=0$，滿足 $\overline{PF}=d(P,L)$ …拋物線定義，故 $P(x,y)$ 在拋物線上

17. 不失一般性可設雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ，則其漸近線方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ 與 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

設 $P(u,v)$ 點在雙曲線上，則 $\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}=1$ 且 $P(u,v)$ 到兩條漸近線的距離乘積為

$$\frac{\left|\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}\times\frac{\left|\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=\frac{\left|\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)\right|}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$ 為定值。

18. 能找到 p 的充要條件為 $D=b^2-4ac$ 為完全平方數。

設 a、b、c 均為奇數，為了方便，令 $2m+1$，則 $D=4\left[m(m+1)-ac\right]+1$，可得 $D=8n+5$，即 D 為以 8 除之餘 5 的奇數。

但任一奇數 $2k+1$ 的平方為 $4k(k+1)+1$，這是除以 8 餘 1 的奇數。故 D 不為完全平方數。

所以，a、b、c 不可三者均為奇數。

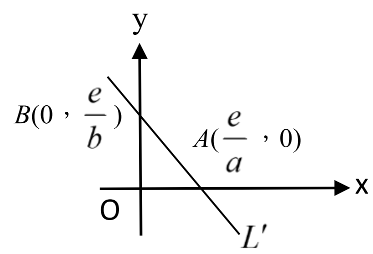
19. (1) 若 $a=0$ 或 $b=0$，則很容易檢查出公式成立。

(2) 若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，則

(i) 因平移不影響距離，所以將點 $P(x_0\ ,y_0)$ 平移至原點 $O(0\ ,0)$，即左移 x_0 且下移 y_0，則直線 $L:ax+by+c=0$ 變為 $L':a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0$

(ii) L' 之 x 截距為 $\dfrac{ax_0+by_0+c}{a}=\dfrac{e}{a}$，$L'$ 之 y 截距為 $\dfrac{ax_0+by_0+c}{b}=\dfrac{e}{b}$，其中 $e=-(ax_0+by_0+c)$，

$\therefore\ d(P,\ L)=d(O\ ,\ L')=$ 直角三角形 OAB 中斜邊上的高 $=\dfrac{\text{兩股相乘}}{\text{斜邊}}$



$$=\frac{\left|\frac{e}{a}\times\frac{e}{b}\right|}{\sqrt{(\frac{e}{a})^2+(\frac{e}{b})^2}}=\frac{|e|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ 。

20. 略

21. 略