1.

考慮$z^{19}=1$ 的 19 個根，

$z=\cos\frac{2k\pi}{19}+i\sin\frac{2k\pi}{19}$，其中 k=1,2,3⋯19

由根與係數關係知道這 19 個根之和為 0，

那麼實部之和也是 0

$$\sum_{k=1}^{19}\cos\frac{2k\pi}{19}=0$$

又$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$-\cos\frac{\pi}{19}=\cos\frac{18\pi}{19}$

$-\cos\frac{3\pi}{19}=\cos\frac{16\pi}{19}$

$-\cos\frac{5\pi}{19}=\cos\frac{14\pi}{19}$

$-\cos\frac{7\pi}{19}=\cos\frac{12\pi}{19}$

$-\cos\frac{9\pi}{19}=\cos\frac{10\pi}{19}$

$$\sum_{k=1}^{19}\cos\frac{2k\pi}{19}=1+2\sum_{k=1}^{9}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{19}=0$$

因此$\sum_{k=1}^{9}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{19}=-\frac{1}{2}$